H. Diehl

1973

# DIE DREIFACHSPALTUNG VON ATOMKERNEN IM TROPFENMODELL

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik der

Johann Wolfgang Goethe-Universität

in Frankfurt am Main

von

Herbert Diehl

aus

Crumstadt/Hessen

Frankfurt am Main

Mai 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

| | |
|---|---|
| Dekan: | Prof. W. Jung |
| Leiter der Arbeit: | Prof. Dr. W. Greiner |
| Erstgutachter: | Prof. Dr. W. Greiner |
| Zweitgutachter: | Prof. Dr. R. Dreizler |

Tag der mündlichen Prüfung: 5. Juli 1973

INHALTSVERZEICHNIS


| Kapitel | | Seite |
|---|---|---|
| I | Einleitung | 1 |
| II | Bisherige Untersuchungen zur Dreifachspaltung | 4 |
| | A Experimente | 4 |
| | B Theoretische Ansätze | 6 |
| III | Das Tropfenmodell | 9 |
| IV | Die Parametrisierung | 12 |
| V | Die Coulombenergie | 15 |
| VI | Ergebnisse | 18 |
| | A Die oblate Dreifachspaltung | 18 |
| | B Die prolate Dreifachspaltung | 20 |
| | C Vergleich von binärer und ternärer prolater Spaltung | 22 |
| VII | Das Tropfenmodell am Zerreißpunkt | 25 |
| VIII | Vergleich mit dem Experiment | 30 |
| IX | Zusammenfassung und Ausblick | 36 |
| Anhang | | |
| A1 | Der oblate Tropfen | 38 |
| A1.1 | Die Geometrie | 38 |
| A1.2 | Das Volumen | 47 |
| A1.3 | Die Oberfläche | 51 |
| A2 | Der prolate Tropfen | 53 |
| A2.1 | Die Geometrie | 53 |
| A2.2 | Das Volumen | 55 |
| A2.3 | Die Oberfläche | 55 |
| A3 | Integration über die Yukawakraft | 57 |
| | Literaturzitate | 60 |
| | Figurenunterschriften | 63 |

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523706_0029

# I EINLEITUNG

Hahn und Straßmann (HahS39) gelang 1938 der erste experimentelle Nachweis der Kernspaltung und noch im gleichen Jahr benutzten Bohr und Wheeler (BohW39) das Tropfenmodell zur theoretischen Erklärung. Aus den festgestellten Spaltprodukten konnte man auf eine Teilung des Kernes in zwei Bruchstücke schließen, und die ersten theoretischen Untersuchungen waren auch auf die Erklärung der binären Spaltung gerichtet.

Allerdings erkannte man bald (PreK40), daß sich ein geladener Flüssigkeitstropfen nicht nur in zwei, sondern auch in drei und mehr Fragmente teilen kann. Einfache Überlegungen im Tropfenmodell (vergl.Kapitel III ) ergaben, daß etwa von Elementen der Ordnungszahl Z=35 an die Spaltung in drei gleich große Fragmente exotherm wird und von Z=80 an der Energiegewinn bei Dreifachspaltung den der binären Spaltung überwiegt.

Diese energetischen Überlegungen lassen allerdings keine Aussage über die Höhe der Spaltbarriere zu. Swiatecki (Swi58) stellte einige qualitative Überlegungen zur Mehrfachspaltung von hochgeladenen Flüssigkeitstropfen an. Bei der Untersuchung von Gleichgewichtsdeformationen eines geladenen Flüssigkeitstropfens fand Strutinsky (Str63) prolate Tropfenformen mit zwei und mehr Einschnürungen für niedrige Kernladungszahlen.

Einigen Gruppen gelang dann der experimentelle Nachweis von drei etwa gleich großen Fragmenten bei Spaltung, die von energiereichen Teilchen oder Schwerionen induziert wurde. Daraufhin versuchte Muzychka (Muz67) mit dem Modell der Kaskadenspaltung quantitative Aussagen über Dreifachspaltung zu machen.

Das Auftreten von leichten geladenen Teilchen wie Protonen, Deuteronen oder $\alpha$-Teilchen bei binärer Spaltung (charged particle accompanied fission) wird oft als

Dreifachspaltung bezeichnet. Diese Art der Spaltung zeigt generell ähnliche Eigenschaften wie binäre Spaltung und wird hier nicht betrachtet.

Ein weiterer Anstoß zur Untersuchung der Dreifachspaltung erfolgte bei der Untersuchung der Potentialenergiefläche (PEF) überschwerer Elemente. Schalenmodellrechnungen ergaben (Gru69), daß für diese hochgeladenen Kerne die PEF in Richtung der oblaten Achse weicher war als in prolater Richtung. Eine Spaltung über eine oblate Sattelpunktskonfiguration hätte als ein Ausgangspunkt für Mehrfachspaltung angesehen werden können. Da das benutzte Einzentrenschalenmodell jedoch nur für kleine Deformationen Gültigkeit besaß, war eine Entscheidung darüber unmöglich, ob der Kern weiter entlang der oblaten Achse spaltet oder zur prolaten Achse zurückkehrt.

Um diese Frage zu entscheiden, ist die Entwicklung eines Modells notwendig, das die Berechnung der PEF vom Grundzustand bis zum Zerreißpunkt gestattet. Am geeignetsten dazu wäre ein Dreizentrenschalenmodell mit einem entsprechenden Tropfenmodell zur Renormierung nach Strutinsky. Als erster Schritt dazu wird in dieser Arbeit das Tropfenmodell entwickelt, von dessen Ergebnissen man schon erwarten kann, daß sie die generellen Eigenschaften der Kerne darstellen.

Es sind drei Wege möglich, auf denen ein Kern in drei Fragmente aufspalten kann. Es sind dies einmal die Kaskadenspaltung wie sie von Muzychka et al. untersucht wurde (Muz67). Kaskadenspaltung bezeichnet stark asymmetrische binäre Spaltung mit anschließender nochmaliger Spaltung des schweren Fragmentes, geht also nicht über den Rahmen der Zweifachspaltung hinaus und kann mit den dort gewonnenen Erkenntnissen behandelt werden.

Weitere Möglichkeiten sind die direkte prolate und oblate Dreifachspaltung. Diese drei Spaltmoden sind in Fig.1 skizziert. Mit den bisherigen Experimenten war es nicht möglich, zwischen den drei verschiedenen

Spaltmoden zu unterscheiden. Die Gründe dafür liegen in experimentellen Schwierigkeiten und auch darin, daß die für eine Unterscheidung notwendigen Kriterien fehlen. Solche Kriterien zu liefern, ist ein Ziel dieser Arbeit, die auf die Behandlung der direkten Moden der Dreifachspaltung gerichtet ist.

Entsprechend diesen beiden Zerfallsmoden wurde die Parametrisierung des Tropfenmodells vorgenommen.

## II BISHERIGE UNTERSUCHUNGEN ZUR DREIFACHSPALTUNG

### A Experimente

Der erste experimentelle Hinweis auf Dreifachspaltung erfolgte bereits 1947 (Tsi47). Die frühen Experimente zeichnen sich dadurch aus, daß spontaner Zerfall oder durch thermische Neutronen induzierte Spaltung untersucht wurde. Diese Experimente gingen entweder negativ aus oder konnten nicht eindeutig ausschließen, daß ihre 'Dreifachspaltereignisse' von zufälligen Koinzidenzen oder dem Zusammentreffen der Kernspuren zweier binärer Spaltungen etc. herrühren.

Am Ende dieser Entwicklung steht eine Experimentreihe von Muga (Mug63), (Mug65), (MugR67) und (MugR69), der in Uran und Plutoniumisotopen durch thermische Neutronen induziert Spaltung untersuchte. Zum Nachweis wurde eine Dreifachkoinzidenzanordnung von Festkörperzählern benutzt. Er gibt das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte von ternärer zu binärer Spaltung mit $\sigma_T : \sigma_B \cong 10^{-6}$ an. Die Experimente sind stark angezweifelt worden (Ste70) und wurden auch von keiner anderen Gruppe so ausführlich wiederholt.

Erst die Verwendung von Projektilen hoher und mittlerer Energie zur Induktion der Spaltung führte dann zum eindeutigen Nachweis der Dreifachspaltung. Zusammenfassungen der bisher durchgeführten Experimente und Literaturzitate finden sich in den Übersichtsartikeln von Brandt (Bra71) und Halpern (Hal71).

Die verschiedenen Experimente sind nur schwer miteinander zu vergleichen, da sie unter den unterschiedlichsten Bedingungen durchgeführt wurden, sowohl die Art der Induktion der Spaltung, als auch die Nachweismethoden unterscheiden sich stark voneinander. Die Experimente lassen sich grob in zwei Gruppen einteilen.

Dies ist zuerst die Gruppe, die Teilchen wie Protonen, Antiprotonen, Pionen etc. im GeV-Bereich benutzt, die Targets sind meist aus Uran. Der Nachteil dieser Methode ist, daß bei diesen hohen Energien eine Anzahl von Reaktionen auftritt, die nur teilweise faßbar sind. So wird auch in dieser Gruppe als Dreifachspaltung einfach das Aufbrechen eines Kernes in drei schwere Fragmente definiert. Dabei wird die Art des Aufbruchs nicht weiter untersucht. Weiter hängt es von der Art der verwendeten Detektoren ab, wo die Grenze liegt, oberhalb derer man die Fragmente als schwer bezeichnet.

Die andere Gruppe benutzt Schwerionen, hauptsächlich Argon und Neon im Energiebereich von etwa 200 MeV bis 400 MeV. Der Vorteil dieser Methode ist, daß man Compoundkerne von berechenbarer Anregungsenergie herstellt, wobei man anhand der Symmetrie der Winkelverteilung der Fragmente die Existenz der Compoundkerne überprüfen kann. Ein weiterer Vorteil ist, daß die entstehenden Compoundkerne Kernladungszahlen besitzen, die um 10-18 Einheiten oberhalb des Targetkernes liegen. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit für Dreifachspaltung wesentlich erhöht.

So war es auch ein Experiment dieser Art (Th+ 414 MeV-Ar), mit dem Fleischer, Price, Walker und Hubbard (Fle66) der erste eindeutige Nachweis der Dreifachspaltung gelang. Mit der dabei verwendeten $4\pi$-Geometrie des Detektors wurde ein Verhältnis $\sigma_T : \sigma_B$ von 3% gemessen, das bis heute nicht wieder erreicht wurde.

Für die Konstruktion eines Modells zur Dreifachspaltung liefern die Experimente nur wenig Hinweise, die meisten Experimente beschränken sich darauf, die Existenz der Dreifachspaltung nachzuweisen. Dies gilt insbesondere für Experimente mit kernchemischen Nachweismethoden, auf die deshalb hier nicht näher eingegangen wird.

Bei mehreren Experimenten wurden die Winkel zwischen den Kernspuren der Fragmente gemessen. Das Ergebnis ist, daß die Bahnen der drei Fragmente im Schwer-

punktsystem in einer Ebene liegenund der wahrscheinlichste Winkel zwischen zwei Fragmenten 120° ist. Modellrechnungen, die unter der Annahme der Spaltung in drei gleiche Fragmente mit je 100 MeV kinetischer Energie für den Fall von z.B. Argon auf Uran (Per69) durchgeführt wurden, konnten die experimentellen Ergebnisse erklären. Für ein Modell scheint deshalb die Beschränkung auf drei gleiche Fragmente sinnvoll, bei einem Tropfenmodell insbesondere auch deshalb, weil man weiß, daß das Tropfenmodell symmetrische Konfigurationen bevorzugt.

Die aus der Dreifachspaltung der Compoundsysteme (U+Ne, U+Ar) resultierende Verteilung der kinetischen Energien der Fragmente wurde in einem Fall gemessen (Kar67). Die kinetische Energie aller Fragmente ist deutlich höher als bei binärer Spaltung, vergl. Fig.19.

## B Theoretische Ansätze

Der größeren Anzahl von Experimenten stehen bisher nur wenige theoretische Ansätze zur Erklärung der Dreifachspaltung gegenüber. Außer einigen allgemeinen Hinweisen in verschiedenen Arbeiten finden sich erste qualitative Überlegungen zur Mehrfachspaltung eines geladenen Tropfens bei Swiatecki (Swi58). Die Aussagen dieser Arbeit gehen aber nicht darüber hinaus, daß für hochgeladene Kerne, denen es energetisch möglich ist, sehr langgestreckte Formen anzunehmen, eine Abschnürung in mehr als zwei Fragmente wahrscheinlich ist.

Strutinsky et al. (Str63) suchte mit einem Variationsverfahren nach Gleichgewichtsformen symmetrischer Rotationskörper. Durch die numerische Lösung einer Integro-Differentialgleichung für die Erzeugende der Oberfläche erhielt er auch Formen mit zwei und drei Einschnürungen. Diese Lösungen existieren nur für niedrige Kernladungszahlen ($x<0,7$).

Muzychka et al. (Muz67) schließen echte Dreifachspaltung explizit aus und suchen den Anteil der Spalt-

ausbeute, der von Kaskadenspaltung herrühren könnte. Mit bekannten Zerfallsbreiten für Spaltung und Neutronenemission wurde von experimentellen Massenverteilungen ausgehend die Wahrscheinlichkeit für das Entstehen der für Dreifachspaltung charakteristischen leichten Elemente berechnet.

Die damals zumindest teilweise befriedigende Erklärung der Spaltausbeute von Argon auf Uran muß als Zufall angesehen werden, da die experimentellen Massenspektren, die in die Rechnung eingingen durch spätere Messungen (z.B. Oga68) als falsch erkannt wurden. Die Verwendung der neueren Daten würde zu einer wesentlichen Überschätzung der Spaltausbeuten führen. Neuere Rechnungen zur Kaskadenspaltung, die auf insgesamt besseren Daten basieren, liegen nicht vor.

Außer den geschilderten Rechnungen zur Kaskadenspaltung gibt es noch eine theoretische Arbeit, die sich vollständig mit Dreifachspaltung beschäftigt.

Vitta (Vit71) versucht mit der statistischen Theorie die Verteilung der kinetischen Anfangsenergie der drei Fragmente am Zerreißpunkt zu bestimmen. Da er die potentielle Energie am Zerreißpunkt nicht kennt, kann er aber keine Zahlenwerte angeben, sondern nur Vergleiche mit der binären Spaltung anstellen. Eine Aussage über Sattelpunktshöhen oder Spaltausbeuten ist mit dieser Methode ebenfalls nicht zu erhalten. Ein Ergebnis der Arbeit von Vitta ist, daß bei ternärer Spaltung im Mittel die Fragmente am Zerreißpunkt eine höhere kinetische Anfangsenergie haben als bei binärer Spaltung.

In der vorliegenden Arbeit soll nun versucht werden, durch die Berechnung eines Tropfenmodells Aussagen über die Dreifachspaltung zu erhalten. Es ist das erste Mal, daß eine Spaltung über die oblate Barriere ausführlich untersucht wird. Die Ergebnisse dieser Modellrechnung führen zu Sattelpunkten im Rahmen des Modells. Absolute Gleichgewichtszustände, d.h. Sattelpunkte, die bezüglich

der Variation nach allen möglichen Oberflächenparametern stationär sind, können mit dieser Methode nicht erhalten werden, da die Oberfläche hier nur durch drei freie Parameter bestimmt wird. Im Gegensatz dazu liefert allerdings auch die Suche nach Gleichgewichtszuständen keine 'quasistabilen' Täler in einer Potentialenergiefläche.

Dem Sattelpunkt als absolutem Gleichgewichtszustand wurde große Bedeutung zugemessen, als man noch glaubte, mit dem Tropfenmodell den Spaltvorgang völlig beschreiben zu können. Die Bedeutung des Sattelpunktes liegt darin, daß er bei allen Koordinatentransformationen der PEF erhalten bleibt. Verläßt man jedoch den Rahmen eines Modells, so kann dies zu völlig anderen Sattelpunkten führen. Dies wird schon deutlich beim Hinzufügen von Schalenkorrekturen zur PEF des Tropfenmodells.

Neuere Überlegungen relativieren die Bedeutung des Sattelpunktes weiter. Rechnungen ergeben, daß das Durchdringungsintegral für den Potentialwall nicht den geringsten Wert hat, wenn der Kern über den Sattelpunkt spaltet (Bra72). Die Verwendung von variablen Massen verringert die Bedeutung des Sattelpunktes noch weiter.

Die hier vorgenommene Berechnung von Modellsattelpunkten und Energieflächen wird eine Grundlage für zukünftige Schalenkorrekturen sein. Außerdem wird sie auch eine Vorstellung über die Dreifachspaltung liefern, wenn die entsprechende Spaltbarriere nicht durch einen Gleichgewichtszustand bestimmt wird.

## III DAS TROPFENMODELL

Für die Rechnungen wurde ein Tropfenmodell mit homogener Ladungsdichte und scharfer Oberfläche benutzt. Die für den Spaltvorgang interessierende Deformationsenergie des Kernes ist die Differenz der potentiellen Energie des jeweiligen deformierten Zustandes und der Grundzustandsenergie. Im Tropfenmodell ist der Grundzustand immer sphärisch. In der Deformationsenergie treten somit nur deformationsabhängige Größen auf, alle anderen Terme heben sich heraus. In der einfachen Form des Tropfenmodells, die hier benutzt wird, führt dies zu Differenzen zwischen Oberflächen- und Coulombenergie:

$$V = E_S - E_S^\circ + E_c - E_c^\circ \quad .$$

Die notwendigen Parameter wurden der Arbeit (MyeS58) von Myers und Swiatecki entnommen:

die Oberflächenenergie des sphärischen Zustandes

$$E_S^\circ = a \left( 1 - \varkappa \frac{(N-Z)^2}{A^2} \right) A^{\frac{2}{3}} ,$$

die Coulombenergie des sphärischen Zustandes

$$E_c^\circ = \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{r_o A^{\frac{1}{3}}} = c\, Z^2 A^{-\frac{1}{3}} .$$

Die Konstanten gehen in der Hauptsache aus einem Fit an die Grundzustandsmassen der stabilen Kerne hervor. Sie haben die Werte

$$a = 18{,}56 \text{ MeV}, \quad c = 0{,}717 \text{ MeV},$$
$$\varkappa = 1{,}79 \qquad r_o = 1{,}20 \text{ fm}.$$

Das Tropfenmodell in dieser Form und die zugrundeliegenden Parameterwerte sind bis zu einem Massenbereich von $A \cong 10$ hinab gültig.

Es ist üblich und auch zweckmäßig, die Deformationsenergie in Einheiten von $E_S^\circ$ anzugeben:

$$\frac{V}{E_S^\circ} = \varepsilon = B_S - 1 + 2x\,(B_c - 1)\,, \qquad \text{(III.1)}$$

hierbei ist $x$ der Spaltparameter,

$$x = \frac{E_c^\circ}{2E_S^\circ} \cong \frac{Z^2/A}{50}\,. \qquad \text{(III.2)}$$

$B_S$ und $B_c$ stellen die Oberflächen- und Coulombenergie des deformierten Tropfens relativ zum sphärischen dar. Diese beiden Größen hängen nur von der Geometrie des Tropfens ab.

Um eine Vorstellung vom qualitativen Verhalten des geladenen Tropfens zu bekommen, betrachten wir einmal $\varepsilon$ bei leichten Deformationen des sphärischen Zustandes und einmal bei Aufspaltung des Tropfens in $n$ Fragmente in großem Abstand.

Bei einer Entwicklung der Tropfenoberfläche nach Kugelflächenfunktionen

$$r = r_0\,(\,1 + \sum \alpha_{\lambda\mu}\, Y_{\lambda\mu}(\vartheta,\varphi)\,)\cdot A^{\frac{1}{3}} \qquad \text{(III.3)}$$

ergibt sich für die Deformationsenergie (Wil64):

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi E_S^\circ} \sum \left\{ \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{4} - x\,\frac{5(\lambda-1)}{2\lambda+1} \right\} |\alpha_{\lambda\mu}|^2$$

wenn man sich auf kleine Deformationen beschränkt und höhere Terme in den $\alpha_{\lambda\mu}$ vernachlässigt. Diese Beziehung liefert sofort den kritischen Wert des Spaltparameters, für den der Tropfen seine Stabilität gegenüber einer Deformation der Multipolarität $\lambda$ verliert. Man erhält

$$x_{cr}(\lambda) = \frac{(\lambda+2)(2\lambda+1)}{20}\,,$$

d.h. bei $x_{cr}(2) = 1$ verliert der Tropfen seine Stabilität gegenüber Quadrupoldeformationen und bei $x_{cr}(3) = 1{,}75$ gegenüber reinen Oktupoldeformationen. Betrachten wir die direkte oblate Dreifachspaltung, so können wir aus diesen Überlegungen schließen, daß in der Nähe von $x = 1$ ($Z = 120$) der Kern zwar gegenüber oblaten Quadrupoldeformationen weich ist, aber gegenüber den zur Ausbildung der drei Fragmente notwendigen Oktupoldeformationen relativ steif.

Als dazu entgegengesetzten Fall berechnen wir den totalen Energiegewinn bei Spaltung in mehrere Fragmente. Nehmen wir $n$ gleiche Fragmente, die unendlich weit voneinander entfernt sind. Die Wechselwirkungsenergie verschwindet dann, die Fragmente sind sphärisch und Oberflächen- und Coulombenergie können leicht berechnet werden. Man erhält

$$\varepsilon_\infty = n^{\frac{1}{3}} - 1 + 2x(n^{-\frac{2}{3}} - 1) \quad . \qquad \text{(III.4)}$$

In Fig.2 ist dieser Energiebetrag als Funktion des Spaltparameters für verschiedene Fragmentierungen aufgetragen. Bei $x=0{,}352$ wird die binäre Spaltung und ab $x=0{,}426$ die ternäre energetisch möglich, das entspricht etwa Kernen in der Gegend von Zirkon bzw. Tellur. Von $x=0{,}661$ ($Z=79$) an überwiegt der Energiegewinn bei Dreifachspaltung den der binären Spaltung. Weiter sieht man, daß mit steigender Kernladung die Spaltung in immer mehr Fragmente exotherm wird.

Die Überlegungen zu diesen beiden Grenzfällen können allerdings nur grobe Hinweise auf einen möglichen Zerfallsweg eines Kernes geben. Die Steifigkeit der Potentialenergiefläche gegenüber Oktupoldeformationen wird sich ändern, wenn schon gewisse Ausgangsdeformationen vorhanden sind. Ebenso sagt der asymptotische Energiegewinn nichts aus über die Höhe der Potentialbarriere, die der Kern überwinden muß.

# IV DIE PARAMETRISIERUNG

In diesem Kapitel soll allgemein auf die Parametrisierung der Tropfen eingegangen werden. Details, Formeln und Art der Konstruktion finden sich im Anhang.

Die Parametrisierung soll die Spaltung eines anfangs sphärischen Tropfens in drei gleiche Fragmente beschreiben. Um dies sinnvoll durchzuführen, sind mindestens drei freie Parameter notwendig, die den Fragmentabstand d, die Deformation der Fragmente c/b und die Abschnürung h (neck radius) angeben.

Bei der Konstruktion der Tropfen wurde davon ausgegangen, daß das Volumen und die Oberfläche nach Möglichkeit analytisch berechnet werden sollten. Diese Forderung ist besonders im oblaten Fall wesentlich, da dort mit einem gewissen Fehler bei der Berechnung der Coulombenergie gerechnet werden mußte. Eine Ungenauigkeit bei der Berechnung des volumenerhaltenden Faktors geht fünfmal so stark in eine Unsicherheit in der Coulombenergie ein.

Für die Parametrisierung bietet sich einmal die Entwicklung der Tropfenoberfläche in Kugelflächenfunktionen an, wie es Gleichung III.3 zeigt. Die freien Parameter sind dann gewisse Koeffizienten der Entwicklung, diese Beschreibung läßt eine geschlossene Darstellung der Tropfenoberfläche zu. Diese Parametrisierung führt zu einer näherungsweisen Berechnung der Oberflächenenergie und des Volumens. Weiter sind dadurch so starke Deformationen, bei denen zwei Werte für den die Oberfläche beschreibenden Radiusvektor notwendig sind, nicht darstellbar.

Die andere Möglichkeit der Parametrisierung besteht darin, daß man den Tropfen aus verschiedenen einfachen Teilflächen zusammensetzt. Diese Teilflächen sind meist Rotationsflächen wie Kugeln, Ellipsoide, Rotationshyper-

boloide usw. . Der Nachteil dieser Methode liegt darin, daß sie wenig flexibel ist, wenn man sich einmal auf eine Klasse von Figuren festgelegt hat. Auf der anderen Seite kann man aber damit sogar Zerreißpunktskonfigurationen und getrennte Tropfen beschreiben. Oberfläche und Volumen lassen sich in diesem Fall analytisch berechnen. Deshalb wurde hier diese Art der Parametrisierung benutzt.

Im prolaten Fall ist die Parametrisierung relativ einfach durchzuführen, sie ist eine Erweiterung der von Nix (Nix64) für die Zweifachspaltung eingeführten Tropfengestalten. Wie Fig.3 zeigt, werden Rotationsellipsoide stetig durch Rotationshyperboloide verbunden. Die Oberfläche wird durch eine Funktion $\varrho(z)$ gegeben, wobei die z-Achse die Symmetrieachse ist. Die Parametrisierung ist außer für die hier verwendeten symmetrischen Konfigurationen auch für den Fall verschieden großer Fragmente verwendbar.

Die Parametrisierung der oblaten Figuren erfordert dagegen einen wesentlich größeren Aufwand, der auf die Aufgabe der Rotationssymmetrie zurückzuführen ist. Die Tropfenoberfläche wird als $\varrho(z,\varphi)$ gegeben, vergl. Fig.4. Durch eine Funktion $z_s(\varphi)$ wird jeweils der Wertebereich der z-Koordinate als Funktion der $\varphi$ bestimmt. Da die Abschnürung der Fragmente nicht nur senkrecht zur z-Achse (wie im prolaten Fall), sondern auch parallel zu ihr stattfindet, muß von Anfang an die Oberfläche durch einen inneren und einen äußeren $\varrho$-Wert gegeben werden. Zudem muß je nach dem $(z,\varphi)$-Wert entschieden werden, welche der Teilflächen den Tropfen in diesem Punkt beschreibt.

Die Entstehung der Figur läßt sich folgendermaßen veranschaulichen (vergl. Fig.A1). Grundlage der Konstruktion sind drei gleich große und sich durchdringende Kugeln. Ihre Mittelpunkte liegen auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.

Beim Übergang zwischen den Oberflächen, die zu verschiedenen Kugeln K gehören, tritt ein Sprung auf.

Dieser Sprung wird durch eine Übergangsfläche beseitigt, die eine Kugel K' erzeugt, die entlang der Unstetigkeitslinie auf den Kugeln K rollt.

Dadurch, daß die Übergangsfläche von einer Kugel erzeugt wird, wird sie nur durch einen zusätzlichen freien Parameter bestimmt. Eine Verringerung des Radius der Kugel K' führt zu einer stärkeren Einschnürung. Für eine bessere Beschreibung des Abschnürungsvorganges wäre ein weiterer freier Parameter, wie er zum Beispiel bei der Verwendung von Rotationshyperboloiden im prolaten Fall auftritt, von Nutzen gewesen. Die Übergangsfläche muß sich allerdings vom Mittelpunkt der Figur ausgehend in drei - jeweils einen Winkel von $120^{\circ}$ einschließende - Richtungen verzweigen. Um diesen Übergang stetig durchzuführen, braucht man die Symmetrie der Kugel, die in alle Richtungen abrollen kann.

An die Grundkugeln K werden dann Rotationsellipsoide stetig angepaßt, um eine Exzentrizität der Fragmente zuzulassen. Die Verwendung von Rotationsellipsoiden ist im Grunde physikalisch nicht gerechtfertigt, da bei der vorliegenden Figur die Richtungen senkrecht zu der Rotationsachse der Fragmente nicht gleichwertig sind. Eine Erweiterung der Parametrisierung auf dreiachsige Fragmente hätte allerdings einen enormen mathematischen Aufwand erfordert, ohne daß eine wesentliche Änderung der Ergebnisse zu erwarten ist.

Eine geschlossene Darstellung von Oberfläche und Volumen ist bei dieser Art der Parametrisierung nicht möglich. Oberfläche und Volumen ergeben sich als Summe ihrer geschlossen berechenbarer Teile. Die Rechnungen wurden immer in relativen Längeneinheiten durchgeführt. Die Volumenerhaltung wurde anschließend dadurch berücksichtigt, daß Coulombenergie und Oberflächenenergie mit der fünften bzw. zweiten Potenz des volumenerhaltenden Faktors u multipliziert wurden, wobei

$$u = r \cdot \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3\,V}} \qquad \text{und} \qquad r = 1{,}2 \cdot A^{-\frac{1}{3}} .$$

# V DIE COULOMBENERGIE

Die Coulombenergie eines Tropfens mit konstanter Ladungsdichte $\sigma$ ergibt sich im allgemeinsten Fall durch

$$E_c = \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{\text{Figur}} \frac{d\tau\, d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad . \tag{V.1}$$

Dieses sechsfache Integral läßt sich für Kugeln und Rotationsellipsoide analytisch auswerten (Flü51), bei allen anderen Figuren ist man auf numerische Methoden und Näherungsverfahren angewiesen. Eine Möglichkeit der Auswertung besteht in der Entwicklung des Integranden nach Kugelflächenfunktionen. Dies ist sinnvoll bei kleinen Abweichungen des Körpers von einer Kugel oder einem Ellipsoid und bei einer Parametrisierung wie sie durch Gleichung (III.3) gegeben ist.

Für rotationssymmetrische Figuren wurde dieses Integral (V.1) durch Lawrence (Law67) auf ein dreifaches Integral zurückgeführt. Mit der Verwendung von Zylinderkoordinaten erhielt er:

$$E_c = 2\pi\sigma^2 \int_{-z_r}^{z_r} \rho^2\, dz \int_{-z_r}^{z_r} \rho'^2\, dz' \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{|z-z'|+\left[(z-z')^2+\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\varphi\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \tag{V.2}$$

Hierbei gibt $\rho = \rho(z)$ die Oberfläche der Figur an, die z-Achse ist die Symmetrieachse. Eine weitere Einschränkung bei der Herleitung dieser Formel ist, daß $\rho$ eindeutig sein muß. Figuren, die zur Beschreibung ihrer Oberfläche zwei $\rho$-Werte brauchen, wie zum Beispiel ein Torusring, sind ausgeschlossen.

Genau diese Vereinfachungen sind bei der Behandlung der oblaten Spaltung nicht mehr möglich. Wie in Kapitel IV gezeigt, ist der Tropfen dann nicht mehr rotationssymmetrisch und bei beginnender Einschnürung

sind zwei $\rho$ -Werte $\rho_1$ und $\rho_0$ notwendig, um die Oberfläche völlig zu bestimmen, vergl. Fig.4 .

Deshalb wurde von (V.1) ausgehend die zweifache Integration über die Radien ausgeführt und das verbleibende vierfache Integral numerisch ausgewertet.

Führt man Zylinderkoordinaten ein, so ergibt sich aus (V.1):

$$E_c = \frac{1}{2}\,\sigma^2 \int \frac{\rho\, d\rho\, \rho'\, d\rho'\, dz\, dz'\, d\varphi\, d\varphi'}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi') + \rho'^2 + |z-z'|^2}} \,.$$

Betrachtet man nur die Integration über die Radien $\rho, \rho'$ , so hat man dafür das Integral

$$J_c = \int \frac{\rho\, d\rho\, \rho'\, d\rho'}{w} \,,$$

mit den Abkürzungen

$$w = \rho^2 - 2\rho\rho' c + \rho'^2 + \zeta^2,$$

$$c = \cos(\varphi-\varphi'),$$

$$\zeta = |z-z'| \,.$$

Die Integration über $\rho'$ ergibt

$$J_c = \int \rho\, w(\rho)\, d\rho + c \int \rho^2 \ln\left(w(\rho) + \rho' - \rho c\right) d\rho \,.$$

Die Durchführung des nächsten Integrationsschrittes ist äußerst umfangreich, weshalb auf eine Darstellung hier verzichtet wird, die Kontrolle des Ergebnisses ist ja durch Differentiation jederzeit leicht möglich. Es ergibt sich

$$J_c = \frac{c}{3}\Big[\, \rho'^3 \ln(w+\rho-\rho' c) + \rho^3 \ln(w+\rho'-\rho c) -$$

$$- 2\left(\frac{\varphi}{\sqrt{1-c^2}}\right)^3 \arctan\left(\frac{w+\rho+\rho'}{\varphi}\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\right)\Bigg]$$

$$+ \frac{w}{3}\left(\rho^2+\rho'^2+\frac{\varphi^2}{1-c^2}\right) - \frac{c}{9}\left(\rho^3+\rho'^3\right) + \frac{c}{3}\frac{\varphi^2}{1-c^2}\left(\rho+\rho'\right).$$

Beim Einsetzen der Integrationsgrenzen heben sich die beiden letzten Terme heraus, das heißt, mit einer Funktion

$$3g(\rho,\rho') = c\rho'^3 \ln(w+\rho-\rho' c) + c\rho^3 \ln(w+\rho'-\rho c)$$

$$- 2c\frac{\varphi^3}{\sqrt{1-c^2}^3} \arctan\left(\frac{w+\rho+\rho'}{\varphi}\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\right)$$

$$+ w\left(\rho^2+\rho'^2+\frac{\varphi^2}{1-c^2}\right)$$

läßt sich die Coulombenergie schreiben

$$E_c = \frac{1}{2}\sigma^2 \int d\varphi\, dz\, d\varphi'\, dz' \Big[g(\rho_1,\rho_1') - g(\rho_1,\rho_0') - g(\rho_0,\rho_0') + g(\rho_0,\rho_0')\Big],$$

wobei $\rho_1, \rho_0$ ($\rho_1', \rho_0'$) die die Tropfenoberfläche bestimmenden Radiuswerte sind. Dieses Integral wurde nach Transformation auf einen Quader mit Gaußquadraturen ausgewertet. Bei einer durchschnittlichen Rechenzeit von etwa 2,5 Minuten liefert das entwickelte Programm die Coulombenergie mit einer Genauigkeit von weniger als $10^{-5}$ für nahezu sphärische Formen und von etwa $10^{-3}$ für stark deformierte Zerreißpunktsgestalten.

# VI ERGEBNISSE

## A Die oblate Dreifachspaltung

Als Beispiel für eine mit der angegebenen Parametrisierung berechnete PEF ist in Fig.8 die PEF für das überschwere Element Z=114 gezeigt. Als Koordinaten sind der Abstand a der Fragmente vom gemeinsamen Zentrum und der Krümmungsradius der Übergangsfläche R (vergl. A1.1.2) in relativen Einheiten aufgetragen. In bezug auf die Exzentrizität der Fragmente wurde in jedem Punkt minimalisiert. Die PEF erfaßt den Deformationsbereich zwischen Grundzustand und Zerreißlinie.

In den Figuren 9 und 10 sind Schnitte durch die PEF entlang des Spaltweges aufgetragen für die Elemente Z=114 und Z=164. In Fig.2 ist die Sattelpunktsenergie als Funktion des Spaltparameters dargestellt.

Aus den angegebenen Figuren erkennt man sofort den qualitativen Unterschied zwischen dem Verhalten der Kerne mit Kernladungen kleiner oder etwa gleich Z=114 und dem überschweren Element der zweiten Insel Z=164.

Für das Element 164 liegen Sattelpunkt und Grundzustand nahe beieinander, die Spaltbarriere beträgt etwa 1 MeV. Im Gegensatz dazu hat das Element 114 eine Barriere von 55 MeV und der Sattelpunkt liegt in der Nähe des Zerreißpunktes. In Fig.11 sind noch einmal einige Kernformen für die beiden Elemente zwischen Grundzustand und Zerreißpunkt mit den jeweiligen Sattelpunktsgestalten gezeigt.

Der hier auftretende Unterschied in den Sattelpunktsgestalten ist analog zur Unterscheidung zwischen der Frankel-Metropolis- und der Bohr-Wheeler-Familie, wie sie bei der binären Spaltung vorgenommen wird, vergl. (CohS62). Die Frankel-Metropolis-Formen treten für niedrige Kernladungszahlen ($x \lesssim 0{,}7$, Thorium) auf und entsprechen sich berührenden Kugeln, das heißt Sattelpunkt und Zerreißpunkt

sind benachbart. Die Bohr-Wheeler-Gestalten sind mehr zylinderförmig ohne wesentliche Einschnürung und stellen die Sattelpunktsgestalten bei höheren Kernladungen dar. In diesem Fall sind Sattelpunkt und Grundzustand benachbart.

Dieser Unterschied in den Sattelpunktsgestalten zeigt sich natürlich auch in den Sattelpunktsenergien. Aus Fig.2 sieht man am Abbiegen der Energiekurve, daß dieser Übergang zwischen den Familien verschiedener Sattelpunkte etwa bei $x=1$ stattfindet, also zwischen der ersten und zweiten Insel der überschweren Elemente.

Eine derartige Verschiebung dieser Übergangsstelle gegenüber der binären (prolaten) Spaltung wird verständlich, wenn man bedenkt, daß nach Kapitel III der Tropfen erst bei $x=1{,}75$ gegenüber Oktupoldeformationen instabil wird.

Die sich ausbildenden Fragmente sind stark deformiert, am Sattelpunkt liegt für das Element 114 ein Achsenverhältnis von 1:2,5 vor, für 164 am Zerreißpunkt von 1:3. Diese starken Deformationen sind dadurch zu erklären, daß der Deformationsfreiheitsgrad im Gegensatz zum prolaten Fall eine Möglichkeit zur Erniedrigung der Energie bietet, die nur zum geringen Teil durch die Abstandskoordinate erfaßt wird. Die kleeblattförmige Anordnung der Fragmente führt dazu, daß sich ihre Wechselwirkungsenergie erniedrigt, wenn sie langgesteckte Formen annehmen.

In Fig.12 sind einige Potentialkurven für Rotationsellipsoide aufgetragen. Die Kurven sind analytisch darstellbar, man erhält

oblat: $$B_c = \frac{\sqrt[3]{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon} \arctan\varepsilon\,, \quad B_s = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1+\varepsilon^2}\left(1+\frac{\operatorname{Arsinh}\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right),$$

prolat: $$B_c = \frac{\sqrt[3]{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \operatorname{Artanh}\varepsilon\,, \quad B_s = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1-\varepsilon^2}\left(1+\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right).$$

Hierbei ist $\varepsilon$ die Exzentrizität. Die Potentialkurven geben ebenfalls eine Darstellung vom Verhalten des Tropfens bei oblaten Deformationen und können mit den hier berechneten Potentialkurven verglichen werden.

Auf der oblaten Seite sind für $x<1$ keine Minima vorhanden, für $x=1$ hat die Kurve bei $\varepsilon=0$ einen Wendepunkt. Für $x>1$ tritt auch auf der oblaten Seite ein Minimum auf, der Tropfen wird instabil gegenüber oblaten Deformationen.

Im Vergleich mit den Potentialkurven für die Elemente 114 und 164 sieht man einen qualitativ analogen Verlauf mit den Kurven für $x=0,9$ und $x=1,2$. Da die Parametrisierung für die Dreifachspaltung auf die Ausbildung und Abschnürung der drei Fragmente gerichtet ist, liegt für kleine Deformationen die Oberflächenenergie und damit auch die potentielle Energie höher. Dies führt für das Element 164 zur Ausbildung der kleinen Barriere. Für die niedrigeren Kernladungszahlen wird erst durch die Abschnürung erreicht, daß sich ein Sattel ausbildet, im Gegensatz zu den Rotationsellipsoiden bei denen die potentielle Energie gegen unendlich strebt.

Da für kleine Deformationen die Form eines oblaten Rotationsellipsoides energetisch günstiger ist als die hier verwendeten oktupolähnlichen Deformationen, wird der Kern bei rein adiabatischem Verhalten diese Form annehmen. Nach Rechnungen mit phänomenologischen Schalenmodellkorrekturen (SchS71) im Bereich kleiner Deformationen geht der Kern aus der oblaten Gestalt durch dreiachsige Zwischenformen in eine prolate Form über, die dann zur binären Spaltung führt, siehe auch (Gru69).

## B Die prolate Dreifachspaltung

Bei den Potentialenergieflächen für den prolaten Fall sind als Koordinaten die Gesamtlänge des sich spaltenden Kernes und die Deformation des Fragmentes aufgetragen. Diese Koordinaten wurden gewählt, um einen Ver-

gleich mit der binären Spaltung zu ermöglichen. In jedem Punkt wurde für die Einschnürung der energetisch günstigste Wert gewählt.

Die Sattelpunktsgestalten sind für die hohen x-Werte (x>0,8) Ellipsoide oder Ovaloide. Für x gegen Null besteht die Sattelpunktsgestalt aus drei hintereinander liegenden Kugeln. Für hohe x-Werte gibt es nur einen gemeinsamen Sattelpunkt für prolate Spaltung. Die Sattelpunktsgestalt ist nahezu sphärisch, der Kern schnürt sich erst nach dem Sattelpunkt in zwei, drei oder mehr Fragmente ab. Das bedeutet, daß die Entscheidung zwischen binärer und ternärer Spaltung auf dem abfallenden Teil der PEF fällt und damit dynamische Effekte einen entscheidenden Einfluß haben.

Der Spaltweg verläuft so, daß sich der Tropfen bis zu einem Achsenverhältnis $\beta = c/b$ von etwa 1,4 deformiert. Danach nimmt der Kern unter allmählicher Zurücknahme der Exzentrizität eine mehr zylindrische Form an. Nachdem eine kritische Länge erreicht worden ist, schnürt sich der Kern ab ohne seine Längsausdehnung wesentlich zu ändern. Die Abschnürung erfolgt umso abrupter, je geringer die Kernladungszahl ist. Bei höherer Kernladungszahl ($x \approx 0,9$) überwiegt bei einer Einschnürung des Kernes der Gewinn an Coulombenergie die Erhöhung der Oberflächenenergie schon wesentlich vor dem Zerreißpunkt, das heißt, der Kern schnürt sich langsamer ab.

Für einen Spaltparameter von $x=0,935$ ($Z=114$) zeigt Fig.13 einige Kerngestalten zwischen Grundzustand und Zerreißpunkt.

Die Energiebarrieren, die sich aus diesen Rechnungen für prolate Dreifachspaltung ergeben haben, sind in Fig.2 als Funktion von x angegeben. Die Barrieren gegenüber prolater Dreifachspaltung liegen durchweg erheblich niedriger als die gegenüber oblater Dreifachspaltung. Zum Beispiel steht der Energie von 55 MeV für oblate Dreifachspaltung die Energie von 0.115 MeV für prolate Spaltung im Falle $Z=114$ gegenüber.

## C Vergleich von binärer und ternärer prolater Spaltung

Da für höhere Kernladungszahlen ein gemeinsamer Sattelpunkt für binäre und ternäre Spaltung existiert, stellt sich die Frage, weshalb der überwiegende Teil der Kerne binär spaltet wie experimentell festgestellt wurde. Selbst für Uran lassen sich die negativen Resultate bei der Suche nach Dreifachspaltung nicht durch die Barrierenhöhe erklären. Bei den meisten induzierten Spaltungen besitzt der Kern die zur Überwindung der Barriere notwendige Energie.

Zur Erläuterung dieser Frage wurden in Fig.14, Fig.15 und Fig.16 Schnitte durch die PEF entlang des Spaltweges aufgetragen. Es wurden typische Beispiele gewählt, die auch experimentell realisiert wurden, nämlich die Compoundkerne $^{242}$Pu ($^{238}$U+$\alpha$), $^{252}$Es ($^{238}$U+$^{14}$N) und $^{278}$110 ($^{238}$U+$^{40}$Ar). Es ist jeweils die Potentialenergiekurve für binäre und ternäre Spaltung eingezeichnet. Für den Compoundkern mit der niedrigsten Kernladung sind die Sattelpunkte für die beiden Spaltmoden noch getrennt, der ternäre Sattelpunkt liegt etwa 3 MeV höher, in den beiden anderen Beispielen fallen die Sattelpunkte zusammen.

Als erstes zeigt sich, daß die berechneten Modellsattelpunkte keine echten Gleichgewichtszustände sind, solange sie nicht mit den binären zusammenfallen. Auf dem Weg zur Dreifachspaltung ist der Kern in bezug auf binäre Einschnürung immer instabil. Bildlich gesprochen, verläuft in einer PEF der binäre Spaltweg in einem Tal, der ternäre entlang eines Abhangs oberhalb dieses Tales. Mit der Ausbildung der beiden Einschnürungen kurz vor dem Zerreißpunkt mündet der ternäre Spaltweg in ein höher gelegenes 'quasistabiles' Tal.

Mit wachsender Kernladungszahl fallen die beiden Sattelpunkte zusammen und der energetische Unterschied zwischen den beiden Spaltmoden verringert sich. Das quasistabile Tal ist im Falle ($^{238}$U+$^{14}$N) fast noch nicht ausgebildet, die Abschnürung erfolgt kurz vor dem

Zerreißpunkt. Bei Z=110 beginnt die Abschnürung wie oben erläutert schon früher, das heißt das quasistabile Tal schiebt sich mit wachsendem Z an den Punkt heran, bei dem sich die beiden Spaltwege trennen.

Dies hat verschiedene Konsequenzen. Ist die Spaltung ein völlig adiabatisch verlaufender Prozeß, d.h. nimmt der Kern immer die energetisch günstigste Gestalt an, wird er immer binär spalten. Nur eine Abweichung von der Adiabatizität kann zur Dreifachspaltung führen. Adiabatizität bedeutet, daß die kollektiven Frequenzen gegenüber den Teilchenfrequenzen sehr klein sind. Werden bei einer Anregung des Kernes auch höhere kollektive Schwingungen erzeugt, so verringert sich die Adiabatizität des Spaltvorganges, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß der Kern ternär spaltet nimmt zu.

Die Verringerung des Abstandes zwischen dem Punkt in dem sich die beiden Spaltwege trennen und dem Beginn des quasistabilen Tales der Dreifachspaltung mit der Kernladungszahl begünstigt die Dreifachspaltung. Dieser Effekt wird noch dadurch verstärkt, daß sich ebenfalls der energetische Abstand zwischen den beiden Spaltwegen verringert.

Ein solcher Spaltmechanismus erklärt die gemessenen Verhältnisse von ternärer zu binärer Spaltausbeute, nämlich ein starkes Ansteigen mit der Kernladungszahl und der Anregungsenergie. Weiter zeigen die gemessenen Werte für Dreifachspaltung kein Schwellenverhalten (vergl. z.B. Per66 und Fig.19). Dies wurde von Karamyan et al. (Kar67) als Argument gegen einen direkten Spaltmechanismus verwendet. Die hier vorgeschlagene Erklärung führt in dem in Frage kommenden Energiebereich zu einem ständigen Ansteigen der ternären Spaltausbeute mit der Anregungsenergie.

An den vorliegenden Verhältnissen können allerdings noch entscheidende Veränderungen auftreten. Da die Energieunterschiede zum Teil nur bei einigen MeV liegen, könnten Schaleneffekte z.B. dazu führen, daß das quasistabile

Tal für Dreifachspaltung schon wesentlich früher beginnt oder sie könnten dort wo die Sattelpunkte nicht zusammenfallen zu einer Änderung der Differenz der Barrierenhöhen führen.

Das generelle Verhalten wird aber schon durch das Verhalten der Flüssigkeitstropfen gegeben werden.

Falls es gelingt die Dreifachspaltung theoretisch und experimentell besser in den Griff zu bekommen, ergibt sich vielleicht die Möglichkeit Effekte der unterschiedlichen Massen bei der Spaltung und Unterschiede im dynamischen Verhalten dieser beiden Spaltmoden zu testen.

## VII DAS TROPFENMODELL AM ZERREISSPUNKT

Die theoretische Rechtfertigung für die Verwendung eines Tropfenmodells für den Atomkern liegt in der kurzen Reichweite der Kernkräfte verglichen mit den Dimensionen des Kernes. Wenn Dimensionen des Kernes vergleichbar werden mit der Reichweite der Kernkraft oder sogar kleiner, verliert das Tropfenmodell seinen Sinn.

Dies bedeutet, daß man Kerngestalten, die stark eingeschnürt oder abgeplattet sind nur noch fehlerhaft mit dem Tropfenmodell beschreiben kann. Solche Gestalten sind bei der Behandlung der Kernspaltung in der Nähe des Zerreißpunktes unvermeidbar.

Änderungen der Oberflächenspannung, die von der unterschiedlichen Krümmung der Oberflächenelemente herrühren, können durch die Einführung von Krümmungstermen berücksichtigt werden. Abgesehen davon, daß beim Fitten der Tropfenparameter an die Grundzustandsmassen keinerlei Hinweis auf Krümmungsterme gefunden wurde (MyeS66), so helfen sie auch bei diesem Problem nicht weiter, am Zerreißpunkt werden sie unendlich. Neben der lokalen Eigenschaft Krümmung des Flächenelements selbst, führt auch die Nähe anderer Oberflächen zu einer Veränderung der Oberflächenspannung. Dies soll an zwei Beispielen verdeutlicht werden.

Bei der oblaten Spaltung zerreißt der Tropfen vom gemeinsamen Zentrum der drei Fragmente her. Kurz vor dem Aufreißen kommen dort die jeweiligen Kernoberflächen aufeinander zu. Die Oberflächenspannung wird sich in diesem Bereich des Kernes verringern, weil dort nicht mehr genug Nukleonen vorhanden sind, um die volle Bindung eines Nukleons in der Oberfläche herzustellen. Der Begriff einer Kernoberfläche selbst wird dort fragwürdig.

Um eine quantitative Vorstellung von diesem Effekt

zu erhalten, wurde folgende Rechnung durchgeführt. Die Kernenergie wird durch ein Integral über die Yukawakraft ausgedrückt:

$$E_y = \frac{V}{8\pi}\,\rho^2 \int \frac{e^{-\frac{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}{\mu}}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\,d\tau_1\,d\tau_2\,, \qquad \text{(VII.1)}$$

wobei $V, \mu$ Potentialtiefe und Reichweite der Yukawakraft sind und die Kerndichte $\rho$ als konstant angenommen wird.

Um den Effekt aufeinanderzustrebender Oberflächen zu simulieren und der Integrierbarkeit des Integrals (VII.1) wegen, wurde die Energie einer Kernmaterieschicht von der Form eines flachen Zylinders berechnet. Der Einfluß der Mantelflächen wird dadurch praktisch zum Verschwinden gebracht, daß der Zylinderradius sehr groß gewählt wird.

Man kann erwarten, daß die Gesamtenergie dann aus zwei Anteilen besteht, von denen der eine negativ, proportional zum Volumen und gestaltunabhängig ist, der andere positiv, proportional zur Oberfläche und gestaltabhängig. Die beiden Terme können mit der Volumen- beziehungsweise Oberflächenenergie identifiziert werden.

Die Integration von (VII.1) ist im Anhang A3 für die Zylindergeometrie durchgeführt.

Hier interessiert die Frage, wie sich die Oberflächenenergie ändert, wenn die Dicke $2d$ des Zylinders vergleichbar wird mit der Reichweite der Kernkraft. Dazu beziehen wir den Oberflächenterm auf die Flächeneinheit und betrachten die Abhängigkeit von $d$. Für eine Reichweite der Kernkraft von $\mu = 0.8$ fm ist dies in Fig.17 aufgetragen. Der Wert für große Dicken ist gleich 1 gesetzt worden. Man sieht, daß von einer Zylinderdicke von 4 fm an die Oberflächenspannung nachläßt: die Oberfläche 'weicht auf'.

Entsprechend diesem Ergebnis wurde zur Demonstration des Effektes die Potentialenergiefläche für $Z = 114$ noch

einmal so berechnet, daß die Oberflächenspannung des im Zentrum des Tropfens gelegenen Flächenstückes verringert wurde. Dieser Oberflächenteil ist im Anhang A1.3.2 mit S1'' bezeichnet. Der Effekt tritt natürlich nicht nur hier auf, sondern auch in anderen Flächenteilen. Deshalb wurde die Oberflächenspannung linear von ihrem vollen Wert auf Null verringert, beginnend bei einer Distanz von 4 fm bei Annäherung der beiden Flächenteile. Das Flächenstück verschwindet bei fortschreitender Spaltung des Tropfens, wenn es verschwunden ist, wird gleichzeitig auch die Oberflächenspannung Null.

In Fig.9 ist die Veränderung der potentiellen Energie entlang des Spaltweges gestrichelt eingezeichnet. Die Barrierenenergie verringert sich um etwa 10 MeV.

Bei der Ausbildung eines Halses zwischen den Fragmenten vor dem Zerreißpunkt tritt der gleiche Effekt auch bei der prolaten (binären und ternären) Spaltung in etwas veränderter Form auf.

Eine zweite Möglichkeit zur Verringerung der Oberflächenspannung zeigt sich bei der Betrachtung zweier sich berührender Fragmente. Auch dort wird die Oberfläche in der Umgebung des Berührungspunktes aufgeweicht. Der Grund dafür ist, daß durch die Einwirkung der Kernkräfte des gegenüberliegenden Fragments die Nukleonen nicht mehr so fest in ihrer Oberfläche gebunden sind. An diesem Beispiel, das ja direkt einer Zerreißpunktskonfiguration entspricht, zeigt sich deutlich die Unzulänglichkeit des Tropfenmodells für diesen Punkt. Betrachtungen von Zerreißpunktseigenschaften mit dem Tropfenmodell, wie sie noch in jüngster Zeit vorgenommen wurden (SchS73) erscheinen deshalb fraglich.

Diese Unzulänglichkeiten können beseitigt werden, indem man die mit konstanter Oberflächenspannung berechnete Oberflächenenergie ersetzt durch Differenzen von Yukawaenergien.

Die Deformationsenergie des Tropfens ist ja

$$V = E_s - E_s^o + E_c - E_c^o \ .$$

Es tritt hier nur die Differenz der Oberflächenenergie auf, weil der Volumenanteil der Tropfenenergie deformationsunabhängig ist und sich heraushebt. Dies bedeutet, daß man die Differenz $E_s - E_s^o$ durch die Differenz der Yukawaenergien $E_y - E_y^o$ ersetzen kann. Das Integral (VII.1) ist dann jeweils über den sphärischen bzw. den deformierten Kern zu erstrecken. Für die potentielle Energie ergibt sich dann:

$$\varepsilon = \frac{V}{E_s^o} = \frac{E_y - E_y^o}{E_s^o} - 2 \times (B_c - 1) . \qquad \text{(VII.2)}$$

Dieser Ausdruck ersetzt die Gleichung (III.1). Nach (SchG69) würde ein solches Modell mit 'extended liquid drop model' bezeichnet. Der dort verwendete Ausdruck für die Gesamtenergie enthält noch Symmetrie- und Kompressionsenergieterme, die aber für die Behandlung der Kernspaltung von geringer Bedeutung sind. Kompressionseffekte sollten nicht auftreten und die Symmetrieenergie ist weitgehend deformationsunabhängig.

Der erste Term in Gleichung (VII.2) gibt die relative Deformationsenergie der Oberfläche an. Beim Tropfenmodell hängt dieser Term nur von der Geometrie des Tropfens ab. Durch das Integral (VII.1) wird jedoch jetzt eine Längeneinheit eingeführt, nämlich die Reichweite der Kernkraft. Dadurch wird dieser Oberflächenterm vom Verhältnis der Kerndimension zur Reichweite der Yukawakraft abhängig, was ja erreicht werden sollte.

Um eine Vorstellung von der Größe des Effektes zu erhalten, wurde die Deformationsenergie zweier sich berührender Kugeln bezogen auf die Kugel doppelten Volumens berechnet. Die Lösung des Integrals (VII.1)

für eine derartige Geometrie ist analytisch durchführbar. Die Ergebnisse der Integration sind im Anhang A3 angegeben.

Um aus den Gleichungen (A4'), (A5') dieses Anhanges einen übersichtlichen Ausdruck für die Defomationsenergie zu erhalten, vernachlässigen wird die kleinen Exponentialterme. Dann ergibt sich für die Deformationsenergie (VII.2)

$$\frac{E_y - E_y^\circ}{E_s^\circ} = \sqrt[3]{2} - 1 - \frac{\mu}{2r_0}(2A)^{-\frac{1}{3}}\left\{1 - 2\frac{\mu}{r_0}(2A)^{-\frac{1}{3}}\right\}. \qquad \text{(VII.3)}$$

Für $\mu \to 0$ geht die Gleichung (VII.3) in den Oberflächenterm der Deformationsenergie eines Tropfenmodells mit scharfer Oberfläche über.

Der Einfluß des Korrekturtermes verringert bei einer Reichweite $\mu = 0{,}8$ fm für $A=238$ die Energie (VII.3) um 14%, bzw. 6% bei einer Reichweite $\mu = 0{,}3$ fm. Hier zeigt sich deutlich die erwähnte Abhängigkeit des Korrekturtermes vom Verhältnis der Reichweite der Kernkraft zu den Dimensionen des Kernes.

Beim Übergang zu einem kleineren System vergrößert sich der Effekt deutlich. Betrachten wir zwei nebeneinanderliegende $\alpha$-Teilchen ($A=8$), so ergibt sich eine Verringerung dieses Energietermes um 24% bei einer Reichweite $\mu = 0{,}8$ fm und von 15% bei $\mu = 0{,}3$ fm.

Dieses Ergebnis zeigt auch eine weitere Anwendungsmöglichkeit dieses Verfahrens auf. Bei der Berechnung von $\alpha$-Teilchenemission begleiteter binärer Spaltung läßt sich das $\alpha$-Teilchen nur schwer durch das Tropfenmodell erfassen. Die Anwendung von Gleichung (VII.2) macht für dieses Problem eine geeignete Behandlung möglich.

## VIII VERGLEICH MIT DEM EXPERIMENT

Wie schon eingangs erwähnt, ist der Vergleich mit dem Experiment schwierig und nur unter Vorbehalt durchzuführen. Wenn auch heute schon eine erhebliche Anzahl von experimentellen Arbeiten vorliegt, so sind doch wegen experimenteller Schwierigkeiten die Ergebnisse meist nicht so, daß sie eine eingehende physikalische Interpretation zuließen. Deshalb wurden für die in diesem Kapitel angestellten Vergleiche nur einige geeignete Experimente ausgewählt.

Die Anwendung der Ergebnisse dieser Arbeit wird natürlich auch dadurch eingeschränkt, daß Schalenkorrekturen fehlen und die Rechnungen rein statisch durchgeführt wurden.

Die Experimente zur Dreifachspaltung untersuchen einen Massenbereich zwischen Uran und dem aus Uran und Argon entstehenden Compoundkern.

Die Energie der zum Induzieren der Spaltung verwendeten Projektile liegt zwischen einen Zehntel eV bei thermischen Neutronen und etwa 30 GeV bei Protonen oder Stickstoffionen.

Betrachten wir zuerst die Abhängigkeit der Spaltausbeute von der Energie des Compoundkernes bzw. der Einschußenergie des Projektils. Die Experimente, die Uran dem Fluß thermischer Neutronen aussetzten, liefern Spaltausbeuten für die ternäre Spaltung, die $10^{-6}$-$7 \cdot 10^{-5}$ der binären Spaltausbeute betragen, (Mug65, Ana72). Die Potentialkurven für diesen Fall sind analog zu denen in Fig.14. Die Barriere für Dreifachspaltung liegt um einige MeV höher als die binäre. Da die Bindungsenergie des Neutrons in $^{235}U$ gerade ausreicht, um die binäre Barriere zu überwinden, wird die Spaltausbeute für ternäre Spaltung verschwindend gering sein. Es ist auch durchaus möglich, daß in den Experimenten spuriose Effekte gemessen

wurden, da die Messung so niedriger relativer Spaltausbeuten sehr schwierig ist. Eine Kritik der Experimente von Muga findet sich bei Steinberg et al. (Ste70). Dort werden die Mugaschen Ergebnisse durch Streuung binärer Fragmente erklärt.

Als hochenergetische Projektile können nur geladene Teilchen verwendet werden. Bei vielen der bisher durchgeführten Experimente sind dies Protonen, Antiprotonen und Pionen im GeV-Bereich. Bei derartig hohen Energien treten eine Anzahl von direkten Prozessen wie Spallation und Fragmentation auf. Da hier nur die echte Spaltung von Compoundsystemen interessiert, werden diese Experimente außer Betracht gelassen.

Eine für unsere Zwecke geeignete Experimentreihe ist von Perelygin et al. (Per66) durchgeführt worden. Als Projektile wurden Argonionen benutzt, Targets waren Uran, Thorium, Wismut und Gold. Durch die Messung der Winkelverteilung der Fragmente kann man nachweisen, daß im Zwischenzustand wirklich Compoundkerne vorliegen. Ein Teil der Ergebnisse ist in Fig.18 wiedergegeben. Bei allen Compoundkernen steigen die Ausbeuten für Dreifachspaltung mit der Energie der Argonionen.

Für Uran als Target sind in Fig.16 die Potentialkurven für binäre und prolate ternäre Spaltung gezeigt. Da die Sattelpunktsenergie nur ein halbes MeV hoch ist, liegt die Anregungsenergie für alle gemessenen Punkte wesentlich darüber.

Der Kern deformiert sich prolat und geht auf dem abfallenden Teil der Potentialkurve bevorzugt auf dem energetisch günstigen Weg zur binären Spaltung. Mit zunehmender Anregungsenergie erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, daß der Kern das einige MeV höher gelegene quasistabile Tal erreicht, das zur Dreifachspaltung führt. Die Barriere für oblate Spaltung liegt bei 65 MeV, d.h. beim Erhöhen der Projektilenergie wird es zusätzlich noch energetisch möglich, daß der Kern oblat in drei Teile spaltet, was ebenfalls zu einer Erhöhung der Spaltaus-

beute führt.

Bei anderen Targetkernen zeigt sich ein analoges Verhalten.

Die Messungen anderer Gruppen zeigen eine qualitativ gleiche Abhängigkeit der Spaltausbeute von der Energie der Projektile.

Die Abhängigkeit der Spaltausbeute vom Spaltparameter läßt sich deswegen nicht einheitlich darstellen, weil die Anregungsenergien für verschiedene Target-Projektil-Kombinationen jeweils andere sind. Es zeigt sich ein starker Anstieg der Spaltausbeute mit der Kernladungszahl. Da die Experimente alle in dem Bereich stattfinden, wo binäre und ternäre Barriere zusammenfallen oder nur wenig verschieden sind, ist dies dadurch zu erklären, daß das quasistabile Tal sich mit wachsender Kernladungszahl an den Punkt heranschiebt, in dem sich binärer und ternärer Spaltweg trennen. Dies führt zu einer Vergrößerung der Dreifachspaltwahrscheinlichkeit.

Als Beispiel sind die Systeme $^{209}Bi + ^{40}Ar$ und $^{238}U + ^{40}Ar$ gegeben. Bei gleicher Einschußenergie der Argonionen von 310 MeV ist die Spaltausbeute beim Target $^{238}U$ um einen Faktor 10 größer, (Kar67).

Karamyan et al. haben für die beiden Fälle Argon und Neon auf Uran das Spektrum der kinetischen Energie der Fragmente gemessen. Es ist in Fig.19 wiedergegeben. Fig.20 zeigt die kinetische Energie der Fragmente als Funktion des Spaltparameters. Die Gerade Ⓑ gibt die freiwerdende kinetische Energie bei binärer Spaltung nach Brack et al. (Bra72) an, die experimentellen Werte sind einer Arbeit von Nix (Nix71) entnommen. Die nach Karamyan et al. bei Dreifachspaltung freiwerdende kinetische Energie ist ebenfalls in dieser Figur eingetragen. Diese Energien liegen deutlich höher als die entsprechenden Werte für Zweifachspaltung.

Die kinetische Energie der Fragmente läßt sich unter der Annahme berechnen, daß die Differenz der Coulomb-

energie am Zerreißpunkt und der Coulombenergie der sphärischen Fragmente in kinetische Energie übergeht. Die Deformationsenergie der Oberfläche wird dann zur Anregungsenergie der Fragmente. Dieses Bild liefert nur eine grobe Abschätzung, denn der Kern gewinnt schon vor dem Zerreißpunkt kinetische Energie (Nix68) und ein Teil der am Zerreißpunkt vorhandenen elektrostatischen Energie wird in Anregungsenergie übergehen. Diese beiden Effekte heben sich sicher teilweise gegeneinander auf. Hier sind noch einige Fragen offen, Nix (Nix68) erhält mit dynamischen Rechnungen im Tropfenmodell unter Berücksichtigung der vor dem Zerreißpunkt gewonnenen kinetischen Energie eine schlechtere Übereinstimmung mit dem Experiment als Brack et al., die die gleichen Argumente wie hier benutzen.

Ist $E_c^\circ$ die Coulombenergie des sphärischen Ausgangskernes, so ist $1/\sqrt[3]{9}\ E_c^\circ = 1/\sqrt[3]{9}\ 2 \times E_s^\circ$ die Coulombenergie der drei Fragmente im Unendlichen. Ist $B_c^z$ die relative Coulombenergie am Zerreißpunkt, so ergibt sich unter den obigen Annahmen für die kinetische Energie der Fragmente:

$$T = \left(B_c^z - \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right) 2 \times E_s^\circ \quad . \qquad \text{(VIII.1)}$$

Da die relative Coulombenergie eine rein geometrische Größe ist, so ist bei geometrisch ähnlichen Zerreißpunktsgestalten der Quotient $T/E_s^\circ$ eine lineare Funktion des Spaltparameters. Die Zerreißpunktsgestalten sind nun weitgehend geometrisch ähnlich. Für die prolate Dreifachspaltung ergibt sich ein Wert von $B_c^z = 0{,}71$, der zur Geraden Ⓣ in Fig.20 führt. Die experimentellen Punkte werden beinahe erfaßt.

Die in Fig.20 nach (Kar67) eingetragenen zwei Energiewerte sind die im Laborsystem gemessenen Energien wie sie dort angegeben wurden, Fehlergrenzen fehlen. Die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung beträgt

14 MeV für Neon bzw. 39 MeV für Argon. Allerdings sind die angegebenen Energiewerte ebenfalls nicht auf die Neutronenemission der Fragmente korrigiert. Die abgedampften Neutronen verringern zwar nicht die mittlere Geschwindigkeit der Fragmente, ändern aber ihre Massenzahl.

Für die Anzahl der emittierten Neutronen liegen keine Rechnungen vor, man kann aber erwarten, daß diese Zahl etwa bei 15 liegt. Dies führt wiederum zu einer Erhöhung der ursprünglichen Energie der Fragmente gegenüber der gemessenen von etwa 5%, was den Effekt der Schwerpunktsbewegung fast wieder kompensiert.

Die relative Coulombenergie des Zerreißpunktes der oblaten Spaltung unterscheidet sich im Rahmen der Rechengenauigkeit nicht von der prolaten. Wegen der stärkeren Deformation der Fragmente ist zwar deren eigene Coulombenergie niedriger, wegen der kleeblattförmigen Anordnung ist aber ihre Wechselwirkungsenergie höher. Eine Unterscheidung zwischen diesen beiden Spaltmoden ist deshalb durch die Messung des Energiespektrums nicht möglich.

Betrachten wir den Prozeß der Kaskadenspaltung, der außer der direkten Dreierspaltung noch möglich ist. Die Kaskadenspaltung ist kein symmetrischer Vorgang, sondern das zuerst entstehende leichte Fragment wird im Feld des schweren Restkernes beschleunigt. Es erhält also eine höhere kinetische Energie als die beiden Fragmente, die aus der Spaltung des Restkernes hervorgehen.

Zur Abschätzung wird angenommen, daß die Zerreißpunktsgestalten sich berührende Kugeln sind und daß das schwere Fragment erst spaltet, wenn die Wechselwirkung mit dem leichten vernachlässigbar ist. So ergibt sich, daß die beiden Fragmente, die aus der Spaltung des Restkernes entstehen eine um 30% niedrigere kinetische Energie haben als das dritte. Dieser Unterschied sollte auch bei einer genaueren Rechnung qualitativ erhalten bleiben.

Da das Anzahlverhältnis der auf verschiedene Art

entstehenden Fragmente 2:1 ist, sollten die in Fig.19 gezeigten Spektren eine deutliche Asymmetrie zeigen, die Ausbeute von Fragmenten niedrigerer Energie sollte doppelt so groß sein wie die von Fragmenten höherer Energie. Da eine derartige Asymmetrie nicht auftritt, folgt, daß die drei Fragmente gleichzeitig in einem eng begrenzten Gebiet entstehen, d.h. Kaskadenspaltung kann so ausgeschlossen werden.

# IX ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Mit einem Tropfenmodell mit drei freien Parametern wurde die oblate und prolate direkte Dreifachspaltung untersucht. Die zu überwindenden Potentialbarrieren wurden als Funktion des Spaltparameters angegeben.

Beim Vergleich von prolater ternärer mit binärer Spaltung zeigt sich, daß für hohe Kernladungszahlen die Sattelpunkte zusammenfallen. Der Spaltweg für Dreifachspaltung läuft von einem gewissen Punkt in der PEF an oberhalb des binären Spaltweges und mündet dann in ein quasistabiles Tal, das zum ternären Zerreißpunkt führt.

Aus dem Vergleich der binären und ternären Spaltwege und ihrer Abhängigkeit von der Kernladungszahl wurden qualitativ die experimentellen Ergebnisse erklärt.

Die Unterscheidung zwischen prolater ternärer und binärer Spaltung fällt auf dem abfallenden Teil der PEF. Dynamische Effekte werden einen entscheidenden Einfluß auf die relativen Spaltausbeuten von binärer und ternärer Spaltung haben. Damit bietet eine Untersuchung der Dreifachspaltung die Möglichkeit für die binäre Spaltung entwickelte Konzepte für variable Massen oder dynamisches Verhalten unabhängig von den speziellen Eigenschaften der binären Spaltung zu überprüfen.

Mit dem Bau von Schwerionenbeschleunigern wird es möglich sein, auch schwerere Ionen als Argon zu beschleunigen. Der Anteil der Dreifachspaltung am Zerfall der so entstehenden Compoundkerne wird damit steigen. Wegen der höheren Spaltraten werden genauere experimentelle Daten über Dreifachspaltung gewonnen werden können.

Die für ein vollständiges Modell noch fehlenden Schalenkorrekturen werden möglicherweise noch einige Veränderungen in den Potentialenergieflächen hervorrufen.

Der energetische Unterschied zwischen dem prolaten ternären und binären Spaltweg beträgt nur einige MeV, ein Energieunterschied, der von Schalenkorrekturen durchaus beseitigt werden kann. Auch im oblaten Fall können die Schalenkorrekturen trotz der hohen Spaltbarrieren einen wesentlichen Einfluß haben, insbesondere auch deshalb, weil nach den Überlegungen von Kapitel VII die Tropfenmodellbarriere um einen beträchtlichen Betrag herabgesetzt werden kann.

Die in diesem Kapitel vorgeschlagene Erweiterung des Tropfenmodells für die Spaltung bietet auch die Möglichkeit, Zerreißpunktsgestalten und kleinere Fragmente zu behandeln. Bei der im Anhang angegebenen Lösung des Yukawaintegrals kann man erkennen, daß mit einer dreifachen numerischen Integration alle rotationssymmetrischen Kerngestalten berechnet werden können. Ein Problem, das bei hinreichender Genauigkeit mit geringer Computerzeit zu lösen ist.

Abgesehen von der Kernspaltung lassen sich die hier verwendeten Parametrisierungen auch zur Behandlung von drei Kernclustern in kettenförmiger und kleeblattförmiger Anordnung benutzen. Die bisherige Entwicklung der Schalenkorrekturen (Ber72, Sche72) zielte hauptsächlich in diese Richtung. Auch hier wird es bei den in Frage kommenden leichten Kernen vorteilhaft sein, den Oberflächenterm des Tropfenmodells durch ein Integral über die Yukawakraft zu ersetzen.

# A N H A N G

## A1 Der oblate Tropfen

### A1.1 Die Geometrie

Dieser Anhang zeigt die Details der Parametrisierung des oblaten Tropfens. Die Entwicklung der endgültigen Form durchlief drei Stufen:

1. Beschreibung des Tropfens durch drei sich durchdringende Kugeln. Es gibt einen freien Parameter, der ihren gegenseitigen Abstand angibt.
2. Die auftretenden Unstetigkeiten in der Oberfläche werden beseitigt. Als zusätzlicher freier Parameter kommt der Krümmungsradius der Übergangsfläche hinzu.
3. Als weiterer freier Parameter wird ein ellipsoidaler Freiheitsgrad der Fragmente eingeführt.

Im Folgenden werden diese drei Tropfenformen mathematisch dargestellt. Jede Form enthält Teile der in der Entwicklung vorangegangenen. Die Tropfenoberfläche wird in Zylinderkoordinaten als Funktion $\rho(z,\varphi)$ gegeben. Da wir auch konkave Oberflächen betrachten, ist $\rho$ zweideutig, $\rho_0$ beschreibt den innern, $\rho_1$ den äußeren Teil der Figur. Zu jedem Wert $\varphi$ gibt es eine Funktion $z_\varphi(\varphi)$, die den Wertebereich von $z$ begrenzt. Diese Funktion wird auch bei der numerischen Berechnung der Coulombenergie als Integrationsgrenze benutzt.

Der Tropfen wird immer nur für den Bereich $0 \le \varphi \le \pi/3$ und $z \ge 0$ dargestellt. Da der Tropfen symmetrisch zu den Ebenen $z = 0$ und $\varphi = 0, \pi/3, 2\cdot\pi/3$ ist, läßt sich jedes Wertepaar $(z,\varphi)$ leicht auf diesen Bereich umrechnen.

### A1.1.1 Die Fläche F0

Der Tropfen wird durch drei sich durchdringende Kugeln dargestellt. Der freie Parameter ist in kartesischen Koordinaten der Abstand des Kugelmittelpunktes vom Ursprung:

$$( x - a )^2 + y^2 + z^2 = r^2 ,$$

in Zylinderkoordinaten

$$\rho_{1,0} = a \cdot \cos\varphi \pm \sqrt{r^2 - z^2 - a^2 \sin^2\varphi} \quad . \qquad (A1)$$

Die Funktion $z_g$ ergibt sich aus $\rho_1 = \rho_0$:

$$z_g = \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2\varphi} \, . \qquad (A2)$$

Bei der expliziten Berechnung wird $r$ als Längeneinheit benutzt und aus der Forderung der Volumenerhaltung bestimmt.

### A1.1.2 Die Fläche F1

Um die bei der Fläche F0 beim Übergang von einer Kugel zur anderen auftretende Unstetigkeit zu beseitigen, wurde ein Verfahren gewählt, das sich anschaulich so darstellen läßt: eine Kugel vom Radius $R$ wird entlang der Trennlinie zwischen den Kugeln ( der Fläche F0) gerollt. Die Fläche F1 , die dabei zwischen den Auflagepunkten der abrollenden Kugel erzeugt wird, vermittelt einen stetigen Übergang zwischen den Grundkugeln. Der Radius $R$ ist ein zusätzlicher freier Parameter. Einen Überblick gibt Fig.A1.

Die Fläche F1 entspricht dem Teil einer Torusfläche deren Achse die Verbindungslinie zweier Kugelmittelpunkte ist. Diese Achse ist in Fig.A1 mit $\zeta$ bezeichnet. Die Torusfläche mit der Achse $\zeta$ muß stetig in die Torusflächen mit den Achsen $\zeta'$ und $\zeta''$ übergehen. Dieser Übergang erfolgt durch einen Teil der Fläche der abrollenden Kugel selbst, vergl. Fig.A1 .

Wegen dieses notwendigen stetigen Übergangs

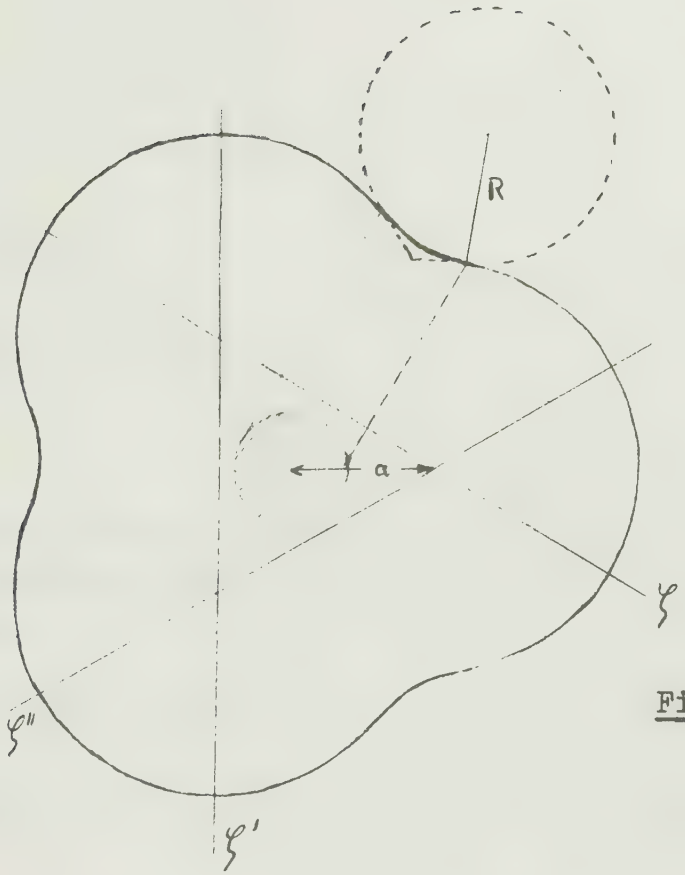



Fig.A1

zwischen den drei Rotationsflächen um die drei verschiedenen Achsen $\zeta$ , $\zeta'$ und $\zeta''$ sind Flächen, die durch eine abrollende Kugel erzeugt werden, die einzig möglichen, die einfach zu behandeln sind. Rotationshyperboloide oder Rotationsparaboloide um die Achsen $\zeta$ führen immer zu Unstetigkeiten im schraffierten Bereich in Fig.A1. Deshalb wurde darauf verzichtet, derartige Flächen zu verwenden, obwohl sich mit ihnen das Abreißen des Tropfens besser beschreiben ließe.

Der Torus hat in dem in Fig.A2 eingeführten $(\xi, \eta, \zeta)$-Koordinatensystem die Form

$$\left(\sqrt{\zeta^2+\eta^2} - B\right)^2 + \zeta^2 = R^2 .$$

B ergibt sich wie man in der Figur ablesen kann durch stetigen Anschluß:

$$B^2 = \left( r + R \right)^2 - \frac{3}{4} a^2 \quad .$$

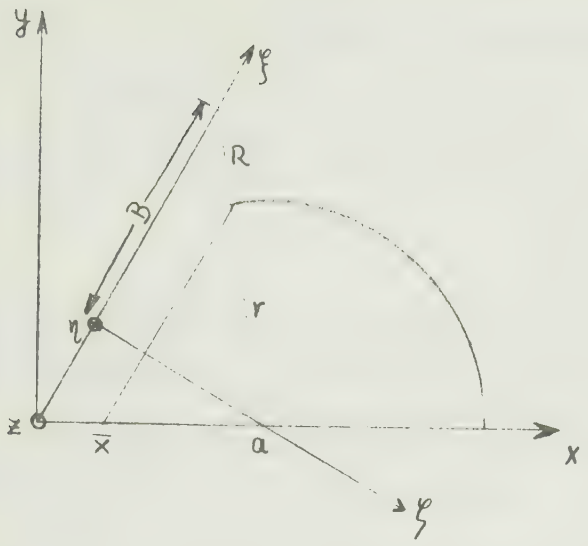



Fig.A2

Durch Transformation in das (x,y,z)-System und Darstellung in Zylinderkoordinaten erhält man für die Radien die Gleichung:

$$\rho^4 - 2ac\rho^3 + \left\{2\left(B^2 - R^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right) - c^2\left(4B^2 - a^2\right)\right\}\rho^2$$
$$+2ac\left\{B^2 + R^2 - \frac{a^2}{4} - z^2\right\}\rho + \left\{B^2 - R^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right\}^2 + B^2\left(a^2 + 4z^2\right) = 0, \qquad \text{(A3)}$$

wobei $c = \frac{1}{2}\left(\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi\right)$ .

Die Gleichung muß numerisch gelöst werden, dabei ist zu gewährleisten, daß man durch Vorgabe geeigneter Näherungswerte immer die physikalisch sinnvollen Nullstellen für $\rho_1$ und $\rho_0$ erhält.

Die Funktion $z_g(\varphi)$ erhält man durch Auflösen von (A3) nach $z$ an der Stelle $\rho = \rho_g$ . $\rho_g$ ist eine doppelte Nullstelle von (A3) . Es ergibt sich

$$z = \sqrt{p - \sqrt{p^2 - q}}\,, \qquad \text{(A4)}$$

wobei $p = ac\rho - \rho^2 + B^2 + R^2 - \frac{a^2}{4}$ ,

$$q = \rho^4 - 2ac\rho^3 + \left\{2\left(B^2 - R^2 + \frac{a^2}{4}\right) - c^2\left(4B^2 - a^2\right)\right\}\rho^2$$
$$+ 2ac\rho\left(B^2 + R^2 - \frac{a^2}{4}\right) + \left(B^2 - R^2 + \frac{a^2}{4}\right)^2 = a^2B^2 \,.$$

Für $\rho_9$ erhält man durch Differentiation von (A4) nach die Gleichung:

$$\rho_9^4 - ac\rho_9^3 + \left\{B^2(1-c^2) + \frac{1}{4}a^2c^2 - \frac{R^2}{1-c^2}\right\}\rho_9^2 + \frac{acR^2}{1-c^2}\rho_9 - \frac{R^2a^2c^2}{4(1-c^2)} = 0 \qquad (A5)$$

die numerisch gelöst werden muß. Einsetzen von $\rho_9$ in (A4) liefert die gesuchte Funktion $z_9(\varphi)$.

Die Teile der Figur, die durch FO bzw. F1 gegeben werden, werden durch die Ebene

$$y = \sqrt{3}\,(\,x - \bar{x}\,) \qquad (A6)$$

voneinander getrennt, wobei sich für $\bar{x}$ ergibt

$$\bar{x} = \frac{a\,R}{R + r} \quad . \qquad (A7)$$

FO wird somit weiter durch die Gleichungen (A1) und (A2) bestimmt, wenn der Parameter a ersetzt wird durch

$$a' = a - \bar{x} \quad .$$

Für jedes Wertepaar $(\varphi, z)$ muß entschieden werden, ob der gesuchte Wert für $\rho_1$ bzw. $\rho_o$ durch die Fläche F1 oder FO bestimmt wird. Dazu brauchen wir eine Funktion $\varphi_9 = \varphi_9(z)$ . Für Werte $\varphi > \varphi_9$ soll $\rho$ durch F1, für $\varphi \leq \varphi_9$ durch FO gegeben werden. Eine solche Funktion läßt sich aus der Schnittkurve von (A6) mit F1 oder FO bestimmen. Wir erhalten

$$\tan\varphi_9 = \frac{\sqrt{3}}{1 + \dfrac{4ar}{ar \pm 2\sqrt{(r^2-z^2)(r+R)^2 - \frac{3}{4}a^2r^2}}} \quad ,$$

wobei das (+) vor der Wurzel für $\rho_1$ gilt, das (-) für $\rho_o$. Für Werte von z , für die der Radikand negativ wird, werden $\rho_{1,o}$ für alle $\varphi$ durch FO gegeben.

Bei der Bestimmung von $\rho_o$ muß noch der Fall gesondert behandelt werden, in dem $\rho_o$ direkt durch die 'abrollende' Kugel gegeben wird. Fig.A3 zeigt einen Schnitt durch die Figur für $\varphi$ = 0. Die 'abrollende' Kugel liegt mit ihrem Mittelpunkt auf der z-Achse in $z_o$

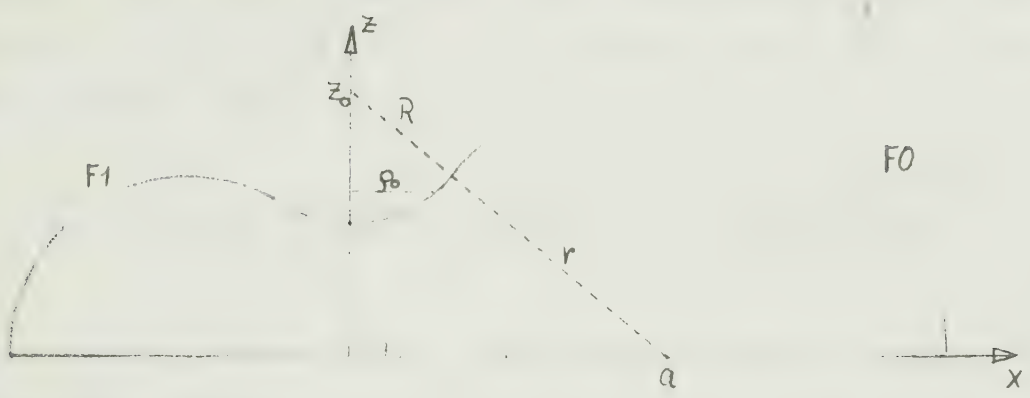



Fig.A3

und berührt gleichzeitig alle drei Grundkugeln FO.

$\rho_o$ wird dann durch die Oberfläche dieser Kugel gegeben:

$$\rho_o = \sqrt{R^2 - ( z - z_o )^2} \quad , \qquad (A8)$$

wobei man $z$ direkt aus Fig.A3 entnehmen kann:

$$z_o = \sqrt{( r + R )^2 - a^2} \quad .$$

Für $z \leq z_o - R$ ist $\rho_o = 0$ für alle $\varphi$ .

Die Trennlinie zwischen der Kugel und der Torusfläche ist ein Großkreis der Kugel. Diesen Großkreis können wir uns entstanden denken als Schnittkurve der Kugel mit einer Ebene, die durch die $\zeta$ -Achse von Fig.A2 und den Kugelmittelpunkt $z_o$ bestimmt ist. Die analytische Darstellung dieses Großkreises wird gegeben durch:

$$z_K(\varphi) = z_o \left\{ 1 - \frac{R}{\sqrt{(r+R)^2 - a^2 \left( 1 - \frac{1}{(\sqrt{3}\sin\varphi + \cos\varphi)^2} \right)}} \right\} . \qquad (A9)$$

Für alle Werte $z_o - R < z \leq z_K(\varphi)$ wird $\rho_o$ durch (A8) gegeben.

Als weiterer Punkt muß der Winkel $\varphi_{01}$ bestimmt werden, der angibt, für welche $\varphi$ - Werte die Funktion $z_g(\varphi)$ ( Gleichungen (A4), (A5) und (A2) ) durch FO oder F1 be-

stimmt wird. Wir erhalten $\varphi_{01}$ aus der Bedingung, daß der Punkt $( \rho = a \cos\varphi_{01},\ z_g, \varphi_{01} )$ auf der Ebene (A6) liegen muß. Daraus folgt:

$$\varphi_{01} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{1 + \frac{6\,R}{r+R} + \sqrt{1 + \frac{12\,r\,R}{(r+R)^2}}}$$

Für $\varphi \leq \varphi_{01}$ wird $z_g(\varphi)$ durch (A2), für $\varphi \geq \varphi_{01}$ durch (A4) und (A5) gegeben.

### A1.1.3 Ellipsoidale Deformationen, die Fläche F2

Beim Einführen eines ellipsoidalen Freiheitsgrades gehen wir von der Parametrisierung des vorigen Abschnittes aus und passen an die Fläche FO ein Rotationsellipsoid an. Den Punkt $P_F$, an dem angepaßt wird, geben wir vor. $P_F$ liegt für $z = 0$ genau am Übergang der Flächen FO und F1. Die Anpassung in diesem Punkt hat den Vorteil, daß der Anteil des Ellipsoids an der Gesamtfigur maximal ist.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, von einem Modell sich durchdringender Ellipsoide (analog zu Kapitel A1.1.1) auszugehen, um dann wie im vorigen Abschnitt die auftretenden Unstetigkeiten zu beseitigen. Dies hätte allerdings zu einem erheblich größeren mathematischen Aufwand geführt, insbesondere wären die Volumen- und Oberflächenintegrale aller Voraussicht nach nicht mehr analytisch lösbar gewesen. Aus diesem Grund wurde dieser Weg nicht eingeschlagen. Fig.A4 zeigt in einem Schnitt durch die Ebene $z = 0$ die Bedeutung der neu auftretenden Parameter. Der Ansatzpunkt $P_F=(x_F, y_F, 0)$ der Fläche F1 (F2) an FO ergibt sich zu

$$y_F = \sqrt{3}\,( x_F - \overline{x} ) \quad ,$$

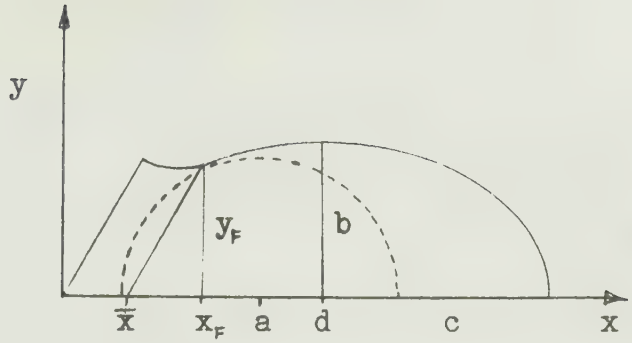



Fig.A4

$$x_F = a - \frac{3}{4}\,\bar{x} + \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - \frac{3}{4}\,\bar{x}^2} \quad .$$

Von der Fläche F2 des Rotationsellipsoids, die in kartesischen Koordinaten die Form

$$\frac{(x-d)^2}{c^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$$

hat, werden durch die Bedingungen des stetigen Übergangs zur Fläche FO die beiden Größen d und b festgelegt. Da wir in unserem Falle ja nur prolate Ellipsoide betrachten, ist c die große Halbachse, die wir als freien Parameter wählen. Wir erhalten

$$d = x_F + \frac{1}{2}\,\frac{y_F}{x_F - a} \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{y_F}{x_F-a}\right)^2 + c^2}$$

und

$$b = c\sqrt{\frac{x_F - a}{x_F - d}} \quad .$$

Die Vorzeichenwahl vor der Wurzel bei d ist so zu treffen, daß für $x_F < a$ das negative und für $x_F > a$ das positive Vorzeichen zu nehmen ist. Für $x_F = a$ gilt $d = a$ und $b = r$ .

Durch Umrechnen der Ellipsoidgleichung in Zylinderkoordinaten erhalten wir

$$\rho_{1,0} = \frac{\Omega\, d\cos\varphi}{c^2} \pm \Omega\sqrt{\left(\frac{d\cos\varphi}{c^2}\right)^2 + \frac{1}{\Omega}\left(1 - \frac{z^2}{b^2} - \frac{d^2}{c^2}\right)} \,,$$

wobei $\Omega^{-1} = \frac{\cos^2\varphi}{c^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}$ .

Für die Funktion $z_g$ ergibt sich

$$z_g(\varphi) = b\sqrt{1 - \frac{d^2}{c^2} + \Omega\,\frac{d^2\cos^2\varphi}{c^4}} \quad .$$

Für den Winkel $\varphi_{02}$, bei dem $z_g(\varphi)$ von F2 auf F0 übergeht erhalten wir aus

$$z_g(\varphi_{02})\big|_{F0} = z_g(\varphi_{02})\big|_{F2}$$

die Gleichung

$$\varphi_{02} = \arccos\sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

wobei

$$p = \frac{1}{a^2}\left(r^2 - a^2 - b^2 + \frac{d^2b^2 - a^2c^2}{c^2 - b^2}\right),$$

$$q = \frac{c^2(b^2 - r^2 + a^2) - b^2d^2}{c^2 - b^2} \quad .$$

Die Trennlinie zwischen F2 und F0 wird gegeben durch

$$\tan\varphi_g = \frac{1}{x_F}\sqrt{r^2 - z^2 - (x_F - a)^2} \quad .$$

Für Werte $\varphi \leq \varphi_g(z)$ wird $\rho_1(\varphi, z)$ durch F2, für größere Winkel durch F0 und F1 gegeben. $\rho_0$ wird immer durch F1 und F0 gegeben, außer für den Fall, daß der Radikand in obiger Gleichung negativ wird. Im Falle $z^2 \geq r^2 - (x_F - a)^2$ wird für $x_F < a$ $\rho_0$ und $\rho_1$ durch F2 gegeben, im Falle $x_F > a$ durch F0 (F1) .

## A1.2 Das Volumen

Bei der Berechnung des Volumens wurde der Tropfen in eine Anzahl analytisch berechenbarer Teilvolumina zerlegt. Diese Zerlegung folgt in etwa der Entwicklung der Geometrie des Tropfens, wie sie in Kapitel A1.1 dargestellt wurde. Das Gesamtvolumen ist die Summe der in den folgenden Kapiteln berechneten Teilvolumina V0, V1, V2.

### A1.2.1 Das Teilvolumen V0

Als erstes berechnen wir das Volumen der sich durchdringenden Kugeln, wie es in Fig.A5 gezeigt ist. Dieses Volumen V0 können wir folgendermaßen schreiben:

$$V0 = 3 \left( \frac{4}{3}\pi r^3 - 2 \left( \frac{\pi}{3} h^2 ( 3r - h ) - 2 V' \right) \right) ,$$

wobei $h = r - \frac{a'}{2}\sqrt{3}$ , die anderen Bezeichnungen haben die gleiche Bedeutung wie im vorigen Kapitel. Zur Verdeutlichung ist in Fig.A5 das Volumen $V'$ eingezeichnet. Man erhält dafür das Integral

$$V' = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{4r^2-3a'^2}-a')} dx \int_{\frac{1}{3}\sqrt{3}x+a'}^{\sqrt{r^2-x^2}} dz \int_0^{\sqrt{r^2-x^2-z^2}} dy \quad .$$

Die Auswertung dieses Integrals liefert mit den Abkürzungen

$$d = \sqrt{4r^2 - 3a'^2} ,$$

$$a_1 = \frac{3a' + d}{\sqrt{4r^2 + 6a'(a'+d)}} , \qquad a_2 = \frac{a'}{d} ,$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{3}(r^2 - a'^2) - a'r}{dr} , \qquad a_4 = \frac{\sqrt{3}(r^2 - a'^2) + a'r}{dr} ,$$

das Ergebnis

$$V' = \frac{\sqrt{3}}{32}\left(-a'r^2 - 3r\sqrt{4r^2-3a'^2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin a_1\right) - \frac{a'\sqrt{3}}{4}\left(r^2 - \frac{a'^2}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin a_2\right)$$

$$- \frac{a'^2}{24}\sqrt{3r^2-3a'^2} + \frac{r^3}{6}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin a_3\right) - \frac{r^3}{6}\,\mathrm{sign}\left(\frac{r}{\sqrt{3}} - a'\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin a_4\right).$$

Für a = a' liefert VO das Volumen einer Kugel, für $r \leq a'$ verschwindet V'.

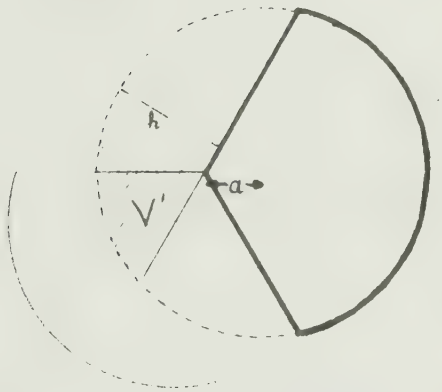
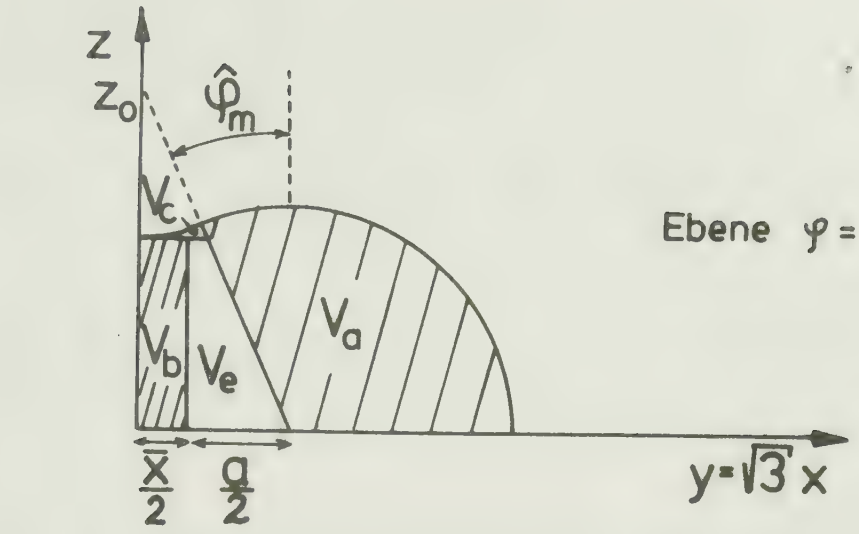


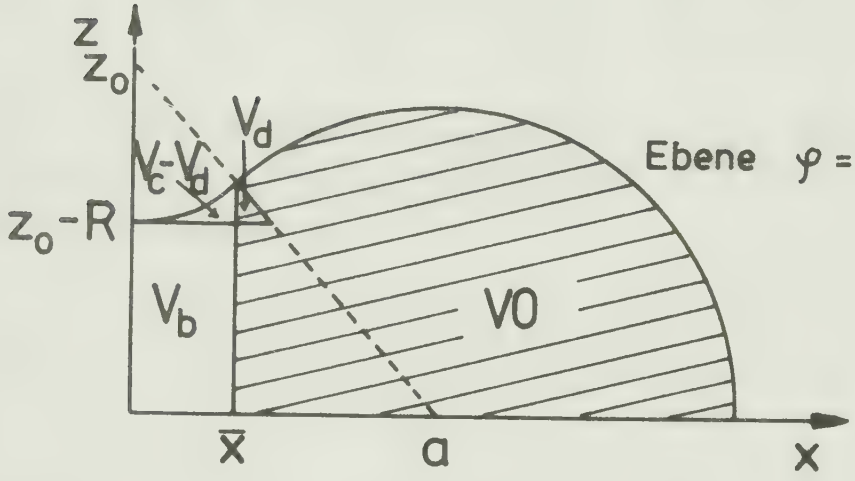

Fig.A5

A1.2.2 Das Teilvolumen V1

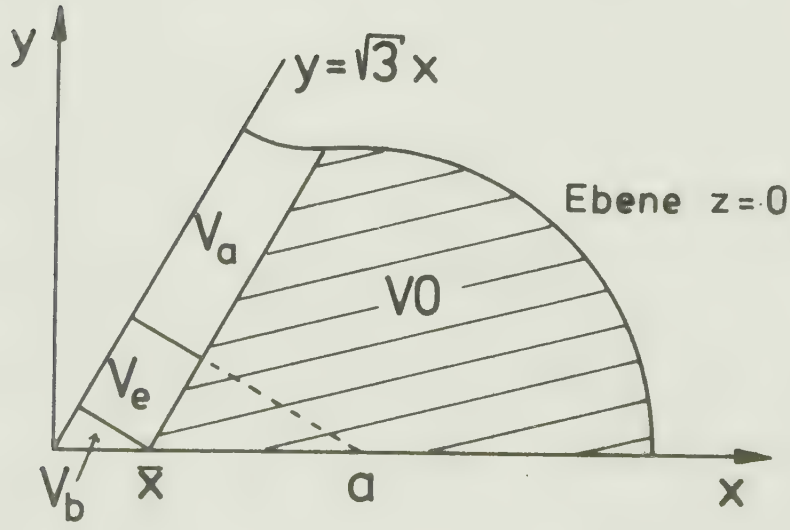
Beim Beseitigen der Unstetigkeiten der Oberfläche kommt der Volumenanteil V1 hinzu, der zur Berechnung in die Teilvolumina $V_a$ - $V_e$ zerlegt wird. Die Figur A6 gibt einen Überblick über die Bezeichnungen. Die Volumina werden wegen der Symmetrie der Figur nur in dem von Fig.A6 bezeichneten Bereich berechnet. Man erhält:


z
$z_o$
$\hat{\varphi}_m$
$V_c$
$V_b$
$V_e$
$V_a$
Ebene $\varphi = 60°$
$\frac{\bar{x}}{2}$
$\frac{a}{2}$
$y=\sqrt{3}x$

a)


z
$z_o$
$V_d$
$V_c-V_d$
$z_o-R$
$V_b$
V0
Ebene $\varphi = 0°$
$\bar{x}$
a
x

b)


y
$y=\sqrt{3}x$
$V_a$
V0
Ebene z=0
$V_e$
$V_b$
$\bar{x}$
a
x

c)

Fig. A6

$$V_a = \frac{1}{2} r_m \left\{ \varrho_m \left( B^2 + R^2 - B \sqrt{R^2 - \varrho_m^2} - \frac{1}{3} \varrho_m^2 \right) - B R^2 \arcsin \frac{\varrho_m}{R} \right\}$$

wobei $\varphi_m = \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{z_0}{B}$ , $\varrho_m = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{x}$.

$$V_b = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{x}^2 ( z_0 - R ),$$

$$V_c = \frac{R^3}{6} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2 z_0^2 - a^2}{4 z_0^2 + a^2} + \frac{\pi}{3} \left( \frac{z_0^3}{R^3} - 3 \frac{z_0}{R} \right) + \frac{z_0 a^2}{R^3} \frac{\sqrt{3}}{4} \right\}.$$

$V_d$ ist ein Volumenterm, der sowohl in $V_c$ , als auch in VO enthalten ist. Er muß deshalb von $V_c$ subtrahiert werden. Es ergibt sich:

für $z_0 \geq R$ : $V_d = \frac{\sqrt{3}}{24} \frac{z_0}{a} \left( \frac{a R}{z_0} - \bar{x} \right)^3$ ,

für $0 \leq z_0 \leq R$ : $V_d = \frac{\sqrt{3}}{24} \frac{z_0}{a} \left( a - \bar{x} \right)^3$.

$$V_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{x} ( z_0 - R ) \left( a - 2 \bar{x} + \frac{a}{z_0} R \right).$$

Der Volumenterm V1 beträgt insgesamt

$$V1 = 12 \left( V_a + V_b + V_c - V_d + V_e \right).$$

A1.2.3 Das Teilvolumen V2 bei ellipsoidalen Deformationen

Für das Volumen des Ellipsoidteiles ergibt sich

$$V_{ell} = 3\pi b^2 \left( d + \frac{2}{3} c - x_f + \frac{1}{3} \frac{(x_f - d)^3}{c^2} \right).$$

Der Teil des durch das Ellipsoid ersetzten Kugelvolumens muß subtrahiert werden, so daß man für das hinzukommende Volumen V2 erhält

$$V2 = 3\pi b^2 \left( d + \frac{2}{3} c - x_f + \frac{1}{3} \frac{(x_f - d)^3}{c^2} \right) - \pi \left( r + a - x_f \right)^2 \left( 2r - a + x_f \right).$$

A1.3 Die Oberfläche

A1.3.1 Die Oberfläche von FO

Die Oberfläche des in Fig.A5 stark umrandeten Teils der Figur ergibt sich durch das Integral

$$\frac{1}{3} SO = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \left( r^2 - \frac{3a'r}{3 + \cos^2\varphi} + \frac{r^2 \sqrt{\cos^4\varphi + 3(1 - a'/r)\cos^2\varphi}}{3 + \cos^2\varphi} \right).$$

Die Durchführung der Integration liefert für die gesamte Oberfläche von FO (vergl. Fig.A5) :

$$SO = 12 r^2 \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r}{\sqrt{4r^2 - 3a'^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{a'}{r} \left( \pi - \arcsin \frac{2r - 3a'}{\sqrt{4r^2 - 3a'^2}} + \arcsin \frac{2r - a'}{\sqrt{4r^2 - 3a'^2}} \right) \right\}.$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung ist beschränkt auf Werte $0 \leq a' \leq r$.
Für Werte $a' \geq r$ gilt $SO = 6\pi r a' \sqrt{3}$.

A1.3.2 Die Oberfläche von F1

Die durch das Beseitigen der Unstetigkeiten der Oberfläche hinzukommende Teilfläche wird weiter in zwei Anteile zerlegt. Die Trennlinie zwischen den beiden Teilen ist die durch Gleichung A9 gegebene Kurve. Man erhält

$$S1' = 6R\varphi_m \left\{ B\left(\pi - 2\arcsin\sqrt{1-\tfrac{3}{4}\bar{x}^2}\right) - \sqrt{3}\,\bar{x} \right\}.$$

Dieser Ausdruck ist gültig für $B \geq R$, d.h. bis zum Auseinanderreißen des Tropfens.
Für die zweite Teilfläche muß man unterscheiden nach den Werten von $z_o$. Für $z_o \geq R$ ergibt sich:

$$S1'' = R^2\left(\pi - 6\arcsin\frac{2z_o^2-a^2}{4z_o^2-a^2}\right).$$

Wenn $z_o \leq R$ muß von S1" die Fläche von zwei Kugelkappen vom Radius R und der Höhe $R-z_o$ abgezogen werden:

$$S1'' = R^2\left(\pi - 6\arcsin\frac{2z_o^2-a^2}{4z_o^2-a^2}\right) - 4\pi\left(R^2-z_o^2\right).$$

Die gesamte Oberfläche von F1 beträgt somit S1 = S1'+ S1''.

A1.3.3 Die Oberfläche bei ellipsoidalen Deformationen

Entsprechend der Konstruktion erhält man für die Ellipsoidoberflächen

$$S_{ell} = 3\pi b\left\{ -\frac{x_f-d}{c^2}\sqrt{c^4-(c^2-b^2)(x_f-d)^2} + b \right.$$
$$\left. -\frac{c^2}{\sqrt{c^2-b^2}}\left\{ \arctan\left((x_f-d)\sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^4-(c^2-b^2)(x_f-d)^2}}\right) - \arctan\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{b}\right\}\right.$$

Da die Ellipsoide ja einen Teil der Kugeloberflächen ersetzen, muß der jetzt wegfallende Teil der Kugeloberflächen von der Gesamtoberfläche abgezogen werden. Die wegfallende Fläche ist die Fläche von entsprechenden Kugelkappen:

$$S_K = 6\pi r\,(r-a-x_f).$$

Die Gesamtoberfläche des Tropfens ergibt sich als Summe der einzelnen Teiloberflächen:

$$S = S0 + S1 + ( S_{ell} - S_k ) .$$

## A2 Der prolate Tropfen

### A2.1 Die Geometrie

Der prolate Tropfen besteht aus Rotationsflächen, die stetig aneinander angepaßt sind. Führt man Zylinderkoordinaten ein (vergl. Fig.A7), so können die Flächen einheitlich durch die Form

$$\varrho_i^2 = a_i - v_i (z - \ell_i)^2$$

ausgedrückt werden. Der Typ der Fläche wird durch die Konstanten bestimmt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_i > 0$ | und | $v_i = 1$ | Kugel, |
| | | $0 < v_i < 1$ | prolates Ellipsoid |
| | | $1 < v_i$ | oblates Ellipsoid |
| | | $v_i < 0$ | einschaliges Rotationshyperboloid, |
| $a_i < 0$ | und | $v_i < 0$ | zweischaliges Rotationshyperboloid, |
| $a = 0$ | und | $v_i < 0$ | das einschalige Rotationshyperboloid entartet zu zwei Kegelstümpfen. |

Mit einem derartigen Formalismus lassen sich leicht symmetrische und asymmetrische Formen des prolaten Tropfens beschreiben. Da aber die Bedingungen für stetigen Anschluß der Flächen für $z > 0$ bzw. $z < 0$ die gleiche Gestalt haben, genügt es, sich auf den Bereich $z > 0$ zu beschränken. Für den Bereich $z < 0$ erhält man diese

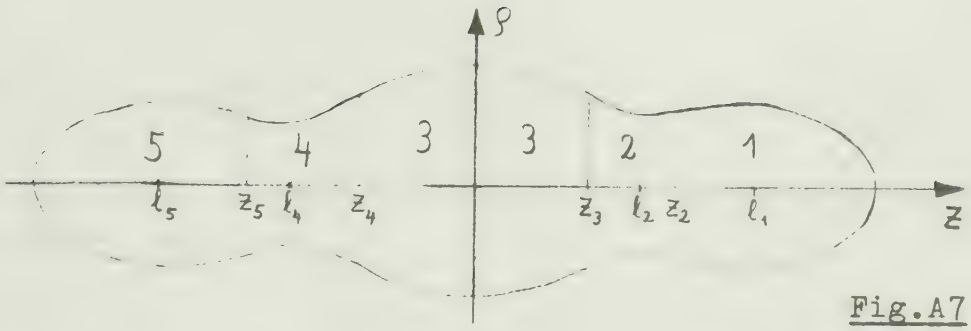



Fig.A7

Bedingungen durch Austausch der Indizes entsprechend Fig.A7.

Legen wir den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt des mittleren Ellipsoids, so folgt für die drei Flächen:

$$\rho_1^2 = a_1 - v_1 (z - l_1)^2 , \quad z_2 \leq z \leq z_1 ,$$
$$\rho_2^2 = a_2 - v_2 (z - l_2)^2 , \quad z_3 \leq z \leq z_2 ,$$
$$\rho_3^2 = a_3 - v_3 z^2 , \quad 0 \leq z \leq z_3 .$$

Aus den Bedingungen für stetigen Übergang an den Punkten $z_2$ und $z_3$ erhalten wir die vier Beziehungen:

$$a_1 - v_1 (z_2 - l_1)^2 = a_2 - v_2 (z_2 - l_2)^2 ,$$
$$a_2 - v_2 (z_3 - l_2)^2 = a_3 - v_3 z_3^2 ,$$
$$v_1 (z_2 - l_1) = v_2 (z_2 - l_2) ,$$
$$v_2 (z_3 - l_2) = v_3 z_3 .$$

Aus diesen vier Gleichungen eliminiert man zweckmäßigerweise die physikalisch uninteressanten Anpaßpunkte $z_2$ und $z_3$. Weiter sollen die Parameter der Fragmente frei wählbar sein, ebenso der Durchmesser des Rotationshyperboloids (neck radius), damit wir über die Abschnürung der Fragmente verfügen können. Somit führen die verbleibenden zwei Bedingungen zur Festlegung der Offnung des

Hyperboloids und seiner Lage:

$$l_2 = q - \sqrt{q^2 - p} \quad ,$$

wobei $q = l_1 \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}$, $p = \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_1}\left\{l_1 - (a_2 - a_1)\frac{v_1 - v_3}{v_1 v_3}\right\}$ .

Für den Fall, daß $a_1 = a_3$ (gleicher Durchmesser der Fragmente) gilt:

$$l = \frac{1}{2 \cdot l_1}\left\{l_1^2 - (a_2 - a_1)\frac{v_1 - v_3}{v_1 v_3}\right\} \quad .$$

Für die Öffnung ergibt sich

$$v_2 = \frac{v_3 (a_3 - a_2)}{a_3 - a_2 - v_3 l_2^2} \quad .$$

Die Grenzen zwischen den einzelnen Flächen sind:

$$z_1 = l_1 + \sqrt{\frac{a_1}{v_1}}, \quad z_2 = \frac{v_1 l_1 - v_2 l_2}{v_1 - v_2}, \quad z_3 = \frac{v_2 l_2}{v_2 - v_3} \quad .$$

## A2.2 Das Volumen

Da alle Teile des Tropfens Rotationskörper sind, ist ihr Volumen leicht zu berechnen und einheitlich darstellbar als

$$V_i = \pi \left\{a_i (z_i - z_{i-1}) + \frac{v_i}{3}\left[(z_{i-1} - l_i)^3 - (z_i - l_i)^3\right]\right\} \quad .$$

Das Gesamtvolumen ergibt sich dann als $V = \sum V_i$ .

## A2.3 Die Oberfläche

Bei der Berechnung der Oberfläche ergeben sich verschiedene Gleichungen, je nachdem ob die Fläche nach innen oder nach außen gekrümmt ist. Allgemein sind die Rotationsflächen darstellbar durch

$$S_i = 2\pi \int \sqrt{a_i - (v_i - v_i^2)(z - l_i)^2}\, dz .$$

Das liefert für $v_i - v_i^2 > 0$

$$S_i = \pi\left[(z-l_i)\sqrt{a_i-(v_i-v_i^2)(z-l_i)^2} + \frac{a_i}{\sqrt{v_i-v_i^2}}\arcsin\sqrt{\frac{v_i-v_i^2}{a_i}}(z-l_i)\right]_{z_{i+1}}^{z_i},$$

für $v_i - v_i^2 < 0$

$$S_i = \pi\left[(z-l_i)\sqrt{a_i-(v_i^2-v_i)(z_i-l_i)^2} + \frac{a_i}{\sqrt{v_i^2-v_i}}\,\mathrm{Arsh}\sqrt{\frac{v_i^2-v_i}{a_i}}(z-l_i)\right]_{z_{i+1}}^{z_i},$$

für $\left|\frac{v_i - v_i^2}{a_i}\right| \ll 1$

$$S_i = 2\pi\sqrt{a_i}\left[z - \frac{1}{6}\frac{v_i-v_i^2}{a}(z-l_i)^3\right]_{z_{i+1}}^{z_i} .$$

Die gesamte Oberfläche ist dann wieder die Summe aller $S_i$.

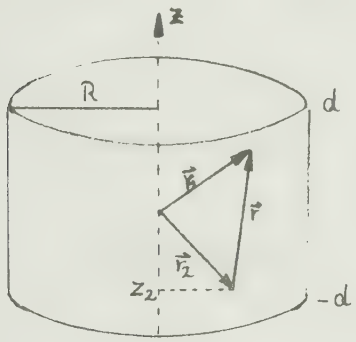
## A3 Integration über die Yukawakraft

In diesem Anhang soll das in Kapitel VII auftretende Integral über die Yukawakraft für zwei spezielle Fälle berechnet werden. Das Integral lautet:

$$E = \frac{V}{8\pi}\,\rho^2 \int \frac{e^{\frac{-|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}{\mu}}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\,d\tau_1\,d\tau_2 \,. \qquad (A1)$$

Die zur Berechnung des Integrals vorgenommenen Transformationen entstammen der Arbeit (SchG69) und einer privaten Mitteilung des Autors.

Zur Integration werden Zylinderkoordinaten und die Variable $\vec{r}$ nach der Skizze eingeführt.




$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (\rho_1-\rho_2)\vec{e}_\rho + (z_1-z_2)\vec{e}_z = \vec{r}\,.$$

Mit der Fouriertransformation

$$e^{-ar} = \frac{1}{2\pi^2}\int \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2+a^2}\,d^3k$$

und $a = 1/\mu$ folgt für (A1)

$$E = \frac{V}{16\pi^3}\,\rho^2 \int \frac{1}{k^2+a^2}\, e^{ik_\rho \rho_1 \cos(\varphi_1-\varphi_k)}\, e^{ik_\rho \rho_2 \cos(\varphi_2-\varphi_k)}\, e^{ik_z|z_1-z_2|}$$

$$\cdot\, k_\rho\, dk_\rho\, dk_z\, d\varphi_k\, \rho_1\, d\rho_1\, dz_1\, d\varphi_1\, \rho_2\, d\rho_2\, dz_2\, d\varphi_2 .$$

Die Integration über die Winkel $\varphi_1, \varphi_2$ liefert Besselfunktionen nullter Ordnung, mit der darauf folgenden Integration über $d\varphi_u$ und $dk_\rho$ erhält man:

$$E = \frac{V\pi}{2} \varsigma^2 \int j_0(k_\rho \rho_1)\, j_0(k_\rho \rho_2)\, \frac{e^{-\sqrt{k_\rho^2 + a^2}\,|z_1 - z_2|}}{\sqrt{k_\rho^2 + a^2}}\, k_\rho\, dk_\rho\, \rho_1 d\rho_1\, \rho_2 d\rho_2\, dz_2\, dz_1\, dz_2 .$$

Mit der Integration über die Radien $\rho_1, \rho_2$ ergibt sich

$$E = \frac{V\pi}{2} \varsigma^2 \int \frac{R_1(z_1) j_1(R_1 k_\rho) R_2(z_2) j_2(R_2 k_\rho)}{k_\rho}\, \frac{e^{-\sqrt{k_\rho^2 + a^2}\,|z_1 - z_2|}}{\sqrt{k_\rho^2 + a^2}}\, dk_\rho\, dz_1\, dz_2 . \quad (A2)$$

Die bisherige Rechnung galt allgemein für einen rotationssymmetrischen Körper. Beschränken wir uns jetzt auf einen Zylinder vom Radius R und der Dicke 2d . Da der Rand $R_2 = R_1 = R$ jetzt von z unabhängig ist, ist die Integration über z leicht durchzuführen, sie ergibt:

$$E = V\varsigma^2 (2d\pi R^2) \int_0^\infty j_1^2(k_\rho R)\, \frac{dk_\rho}{k_\rho (k_\rho^2 + a^2)}$$

Volumenenergie

$$- \frac{1}{2} V\varsigma^2 (2\pi R^2) \int_0^\infty j_1^2(k_\rho R)\, \frac{1 - e^{-\sqrt{k_\rho^2 + a^2}\cdot 2d}}{k_\rho \sqrt{k_\rho^2 + a^2}^3}\, dk_\rho . \quad (A3)$$

Oberflächenenergie

Der letzte Integrationsschritt wird numerisch ausgeführt.

Für den Spezialfall der Yukawaenergie zweier gleich großer, sich berührender Kugeln geben wir die Wechselwirkungsenergie und die Selbstenergie getrennt an. Beide Ausdrücke gehen durch Grenzübergänge aus den Gleichungen des Anhangs von (SchG69) hervor.

Die Selbstenergie einer Kugel vom Radius R beträgt:

$$E_s = -\pi V \varrho^2 \mu^3 \left\{ -\frac{2}{3}\frac{R^3}{\mu} + R^2 - \mu^2 + (R+\mu)^2 e^{-2\frac{R}{\mu}} \right\}. \qquad (A4)$$

Die Wechselwirkungsenergie einer Kugel mit einer gleich großen benachbarten ist:

$$E_{ww} = \frac{\pi}{4} V \varrho^2 \frac{\mu^4}{R} \left\{ R - \mu + (R+\mu) e^{-2\frac{R}{\mu}} \right\}^2 . \qquad (A5)$$

Setzt man $\frac{V}{4\pi} = 1$ $\varrho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ und führt den Grenzübergang $\mu \to \infty$ durch, so ergeben sich die entsprechenden Coulombenergien.

In Gleichung (A4) entsprechen die ersten beiden Terme der Volumen- bzw. der Oberflächenenergie. Wir setzen $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ und fassen die verbleibenden Konstanten zur Oberflächenspannung a zusammen, so daß wir für die Oberflächenenergie $a \cdot A^{\frac{2}{3}}$ schreiben können, vergl. Kapitel III. Die Gleichungen nehmen dann die Form an:

$$E_s = -\frac{2}{3} a \frac{r_0}{\mu} A + a A^{\frac{2}{3}} - a \left(\frac{\mu}{r_0}\right)^2 + a \left(A^{\frac{1}{3}} + \frac{\mu}{r_0}\right)^2 e^{-\frac{r_0}{\mu} A^{\frac{1}{3}}}, \qquad (A4')$$

$$E_{ww} = -\frac{a}{4} \frac{\mu}{r_0} A^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 - \frac{\mu}{r_0} A^{-\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{\mu}{r_0} A^{-\frac{1}{3}}\right) e^{-2\frac{r_0}{\mu} A^{\frac{1}{3}}} \right\}^2 . \qquad (A5')$$

Die Gesamtenergie ergibt sich dann zu

$$E_y = 2 ( E_s + E_{ww} ) . \qquad (A6)$$

LITERATURZITATE

(Alb72) K. Albrecht, Dissertation, Institut für Theor. Physik, Universität Frankfurt/M 1972

(Ana72) R. Anastasievič, M. Jurič, V. Gerc Fisika 4, 1972, 245 (Jugoslawien)

(Ber72) P. Bergmann, Diplomarbeit, Institut für Theor. Physik, Universität Frankfurt/M 1972

(BohW39) N. Bohr, J. A. Wheeler, Phys. Rev. 56, 1939, 426

(BooB70) A. H. Boos, R. Brandt, Proc. VII. Internat. Conf. on Corpuscular Photography and Visual Solid Detectors, Barcelona 1970

(Bra70) R. Brandt et al., J. Physique 31, 1970, 21

(Bra71) R. Brandt, Ang.Chemie,24, 1971, 1000

(Bra72) M. Brack et al., Rev. Mod. Phys. 44, 1972, 320

(CohS62) S. Cohen, W.J.Swiatecki, Ann. of Phys. 19, 1962, 67

(Fle66) R. L. Fleischer et al., Phys. Rev. 143, 1966, 943

(Flü51) S. Flügge, Z. Physik 130, 1951, 163

(Gru69) J. Grumann, U. Mosel, B. Fink, W. Greiner, Z. Physik 228, 1969, 371

(HahS39) O. Hahn, F. Straßmann, Naturwissenschaften 27, 1939, 11 und 89

(Hal71) I. Halpern, Ann. Rev. Nucl. Sci. 21, 1971, 245

(Kar67) S. A. Karamyan et al., Sov. J. Nucl. Phys. 5, 1967, 559

(Law67) J. N. P. Lawrence, Los Alamos Report LA-3774, 1967

(Mug63) M. L. Muga, Phys. Rev. Lett. 11, 1963, 129

(Mug65) M. L. Muga, Symposium on the Phys. and Chem. of Fission, IAEA, Wien 1965, Bd.2, 409

(MugR67) M. L. Muga, C. R. Rice, W. A. Sedlacek, Phys. Rev. 161, 1967, 1266

(MugR69) M. L. Muga, C. R. Rice, II. Internat. Symp. on the Phys. and Chem. of Fission, Wien 1969, IAEA-SM-122/99

(Muz67) Yu. A. Muzychka et al., Sov. J. Nucl. Phys. 6, 1967, 222

(MyeS66) W. D. Myers, W. J. Swiatecki, Nucl. Phys. 81, 1966, 1

(Nix64) J. R. Nix, UCRL-11338, Berkeley 1964

(Nix68) J. R. Nix, UCRL-17958, Berkeley 1968

(Nix71) J. R. Nix, LA-DC 12488, Los Alamos 1971

(Oga68) Yu. Ts. Oganesyan, Nuclear Structure, IAEA, Wien 1968, 489

(Per66) V. P. Perelygin et al., Nucl. Phys. A127, 1966, 577

(Per69) V. P. Perelygin et al., Proc. Int. Topical Conf. on Nucl. Track Registration in Insulating Solids and Applications, Clermont Ferrand 1969, 1

(PreK40) R. D. Present, J. K. Knipp, Phys. Rev. 57, 1940, 1188

(Sche72) H. J. Scheefer, Diplomarbeit, Institut für Theor. Physik, Universität Frankfurt/M 1972

(SchG69) W. Scheid, W. Greiner, Z. Physik 226, 1969, 364

(SchS71) H. und R. Schultheis, Phys. Lett., 35B, 1971, 296

(SchS73) H. und R. Schultheis, Lett. Nuovo Cimento 6, 1973, 169

(Str63) V. M. Strutinsky, N. Ya. Lyashenko, N. A. Popov, Sov. Phys. JETP 16, 1963, 418

(Ste70) E. P. Steinberg et al., Phys. Rev. C1, 1970, 2046

(Swi58) W. J. Swiatecki, Second UN Internat. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva 1958, p.651

(Tsi47) S. T. Tsien et al., J. Phys. Radium, 8, 1947, 165

(Wil64) L. Wilets, Theories of Nuclear Fission, Clarendon Press, Oxford 1964

FIGURENUNTERSCHRIFTEN

Fig.1: Die drei möglichen Wege zur Spaltung in drei etwa gleich große Fragmente sind hier skizziert. Die beiden direkten Spaltmoden werden in dieser Arbeit behandelt.

Fig.2: Die Geraden geben nach dem Tropfenmodell die Energien an, die n sphärische Fragmente im Unendlichen haben, bezogen auf die Oberflächenenergie des Ausgangskernes. Der Parameter an den Kurven gibt die Anzahl n der Fragmente an. Zugrunde liegt die Gleichung III.4 .

Fig.3: Die Parametrisierung des prolaten Tropfens ist veranschaulicht.

Fig.4: Die Parametrisierung des oblaten Tropfens ist veranschaulicht.

Fig.5: Die Figur zeigt Kerngestalten, die mit der prolaten Parametrisierung beschrieben werden können.

Fig.6: Die Figur zeigt Kerngestalten, die mit der oblaten Parametrisierung beschrieben werden können.

Fig.7: Die Barrierenhöhen für prolate und oblate Dreifachspaltung sind in Einheiten der Oberflächenenergie angegeben. Die prolaten Barrieren liegen durchweg niedriger. Für $x=0$ wird die Deformationsenergie dreier sich berührender Kugeln erreicht. Da die Coulombenergie dort verschwindet, gehen die oblate und die prolate Kurve dort ineinander über.

Fig.8: Die oblate PEF für Z=114 ist angegeben. Die Koordinaten sind der Abstand der Fragmente vom gemeinsamen Mittelpunkt a und der Radius R , vergl.A1.1.2, beide in relativen Einheiten, die Energie ist in MeV angegeben. In bezug auf die Exzentrizität wurde in jedem Punkt minimalisiert.

Fig.9: Schnitt durch die PEF von Fig.8. Als Koordinate ist der Abstand d des Zentrums der Fragmente vom gemeinsamen Mittelpunkt in Fermi angegeben. Die niedrigliegendere gestrichelte Kurve ergibt sich unter Berücksichtigung der in Kapitel VII erläuterten Korrekturen zum Tropfenmodell am Zerreißpunkt.

Fig.10: Potentialkurve für Z=164, wie Fig.9 .

Fig.11: Einige Kerngestalten für die Elemente 114 und 164 sind zwischen Grundzustand und Zerreißpunkt angegeben. Die jeweiligen Sattelpunkte sind markiert.

Fig.12: Die Deformationsenergie für prolate und oblate Rotationsellipsoide ist für einige Werte des Spaltparameters angegeben.

Fig.13: Einige Kerngestalten für prolate Dreifachspaltung sind zwischen Grundzustand und Zerreißpunkt angegeben. Der Sattelpunkt von Z=114 ist angegeben.

Fig.14: Die Potentialkurven für binäre und prolate ternäre Spaltung sind angegeben für den Compoundkern $^{238}U+\alpha$. Als Koordinate ist die halbe Länge des prolaten Kernes aufgetragen.
Es bedeuten 1 binärer Sattelpunkt und Beginn der bin. Abschnürung
2 binärer Zerreißpunkt
3 ternärer Zerreißpunkt

Fig.15: wie Fig.14, für $^{238}U+{}^{14}N$,
Es bedeuten 1 Beginn der bin. Abschnürung
2 binärer Zerreißpunkt

Fig.16: wie Fig.14, für $^{238}U$ + $^{40}Ar$.
Es bedeuten 1 Beginn der bin. Abschnürung
2 binärer Zerreißpunkt
3 Beginn der tern. Abschnürung

Fig.17: Die relative Veränderung der Oberflächenspannung zweier Zylinderoberflächen ist als Funktion ihres Abstandes aufgetragen, vergl. Anhang A3. Die Reichweite der Yukawakraft beträgt $\mu$ =0,8 fm.

Fig.18: Abhängigkeit des Verhältnisses $\sigma_T : \sigma_B$ von der Energie der $^{40}Ar$-Ionen für verschiedene Targets, nach Perelygin et al. (Per66). Es bedeuten ○: U, □: Th, ▽: Bi, ●: Au in $2\pi$-Geometrie; ■: Th, ▼: Pb in $4\pi$-Geometrie gemessen.

Fig.19: Von Karamyan et al. (Kar67) gemessenes Spektrum der kinetischen Energie. Es bedeuten ○: $^{238}U$+ 185 MeV $^{22}Ne$, ●: $^{238}U$+ 270 MeV $^{40}Ar$, T: Energie aller drei Fragmente, S: Energie der einzelnen Fragmente.

Fig.20: Die gesamte kinetische Energie der Fragmente bei binärer B und ternärer T Spaltung. Die binäre Gerade nach Brack et al. (Bra72), die binären experimentellen Punkte nach Nix (Nix71). Die ternären experimentellen Punkte nach Karamyan et al. (Kar67). Es bedeutet Δ: $^{22}Ne$, □: $^{40}Ar$. Die ternäre Gerade entspricht Gleichung VIII.1 .

Für die Anregung zu dieser Arbeit und sein stetes Interesse daran möchte ich mich bei Professor W. Greiner an dieser Stelle besonders bedanken.

Mein Dank gilt weiterhin den Kollegen des Instituts, die durch klärende Diskussionen zu dieser Arbeit beigetragen haben.

Nicht zuletzt danke ich Frau Utschig für das Zeichnen der Figuren und Herrn Brose für den Druck dieser Arbeit.

Die numerischen Rechnungen wurden am Zentralen Recheninstitut der Universität durchgeführt.

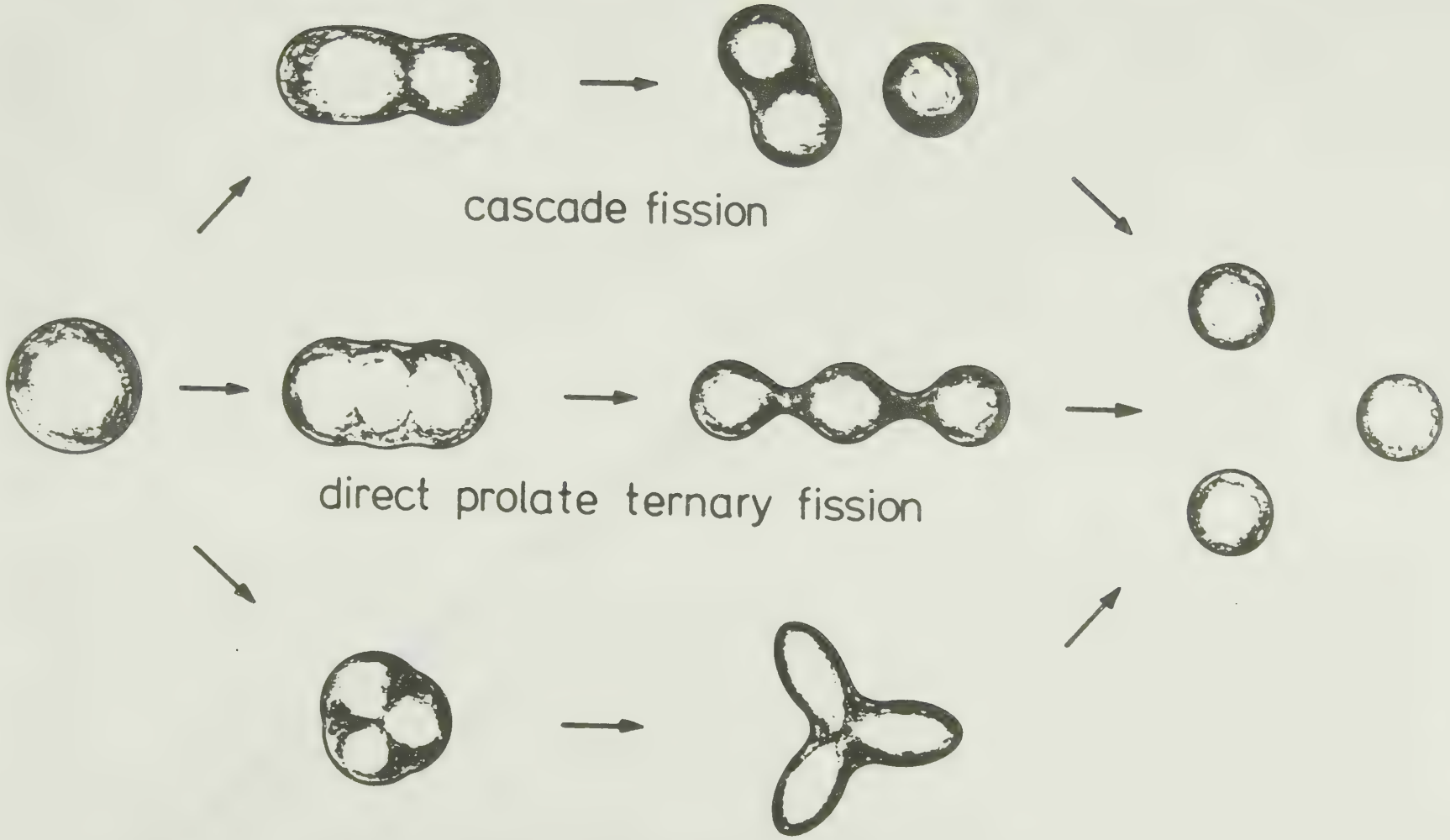

cascade fission
direct prolate ternary fission
direct oblate ternary fission

Fig. 1

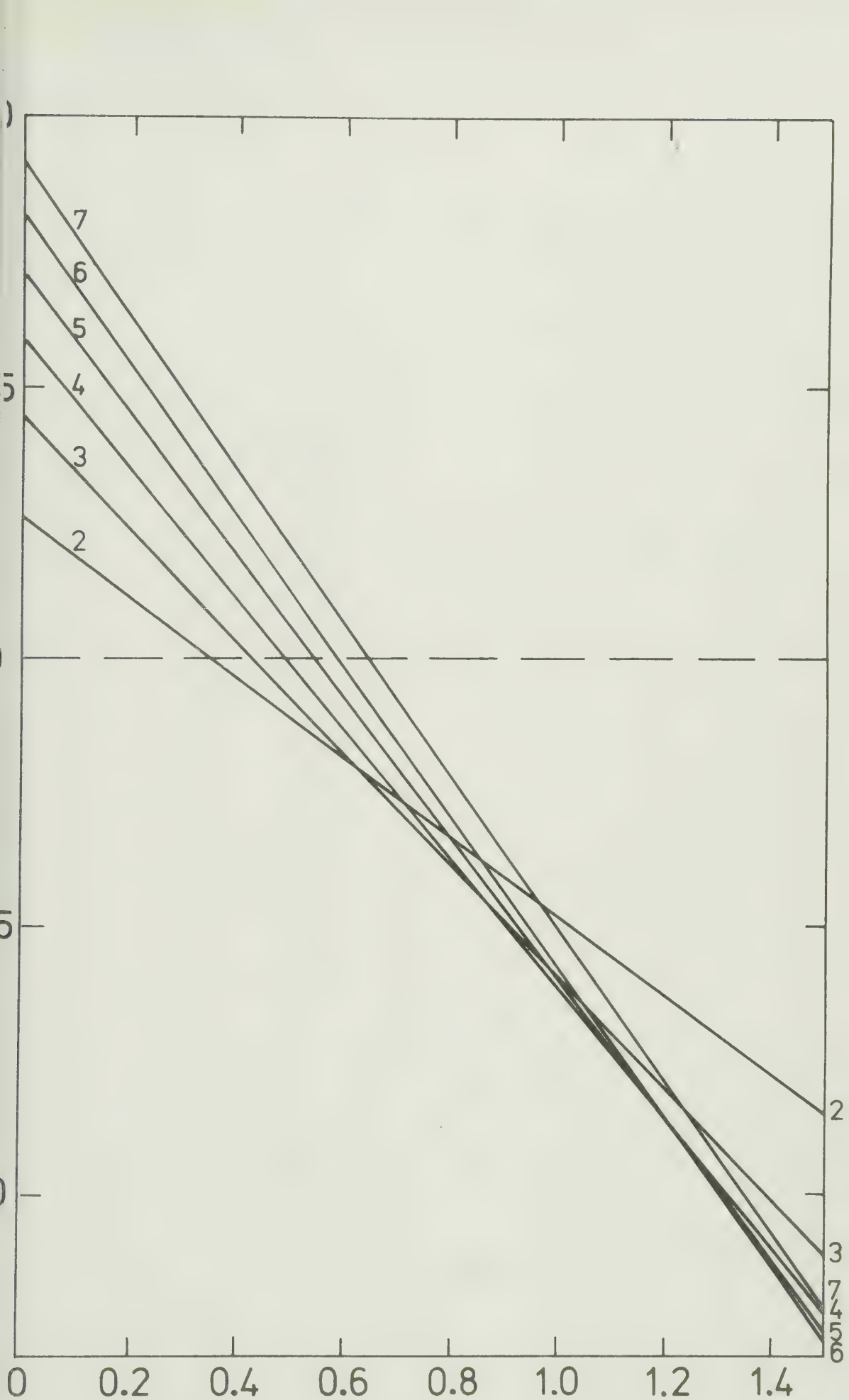



Fig. 2

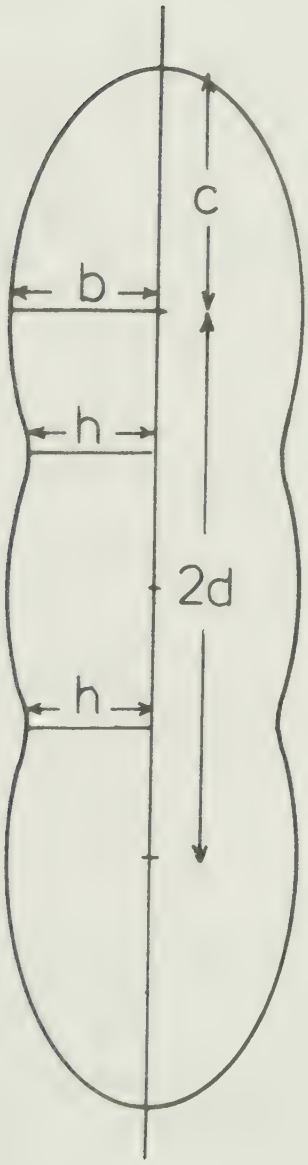



Fig. 3

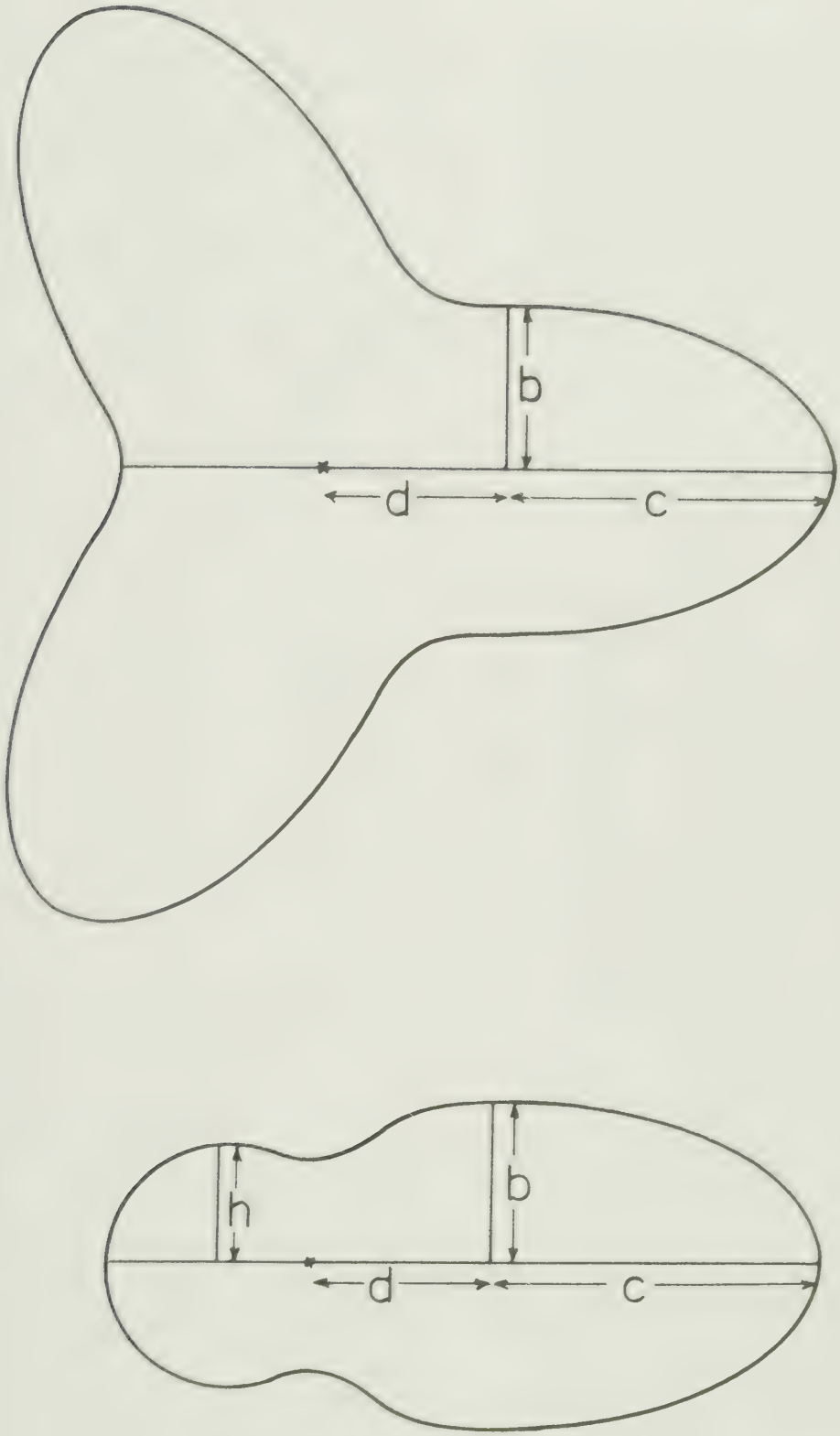



Fig. 4

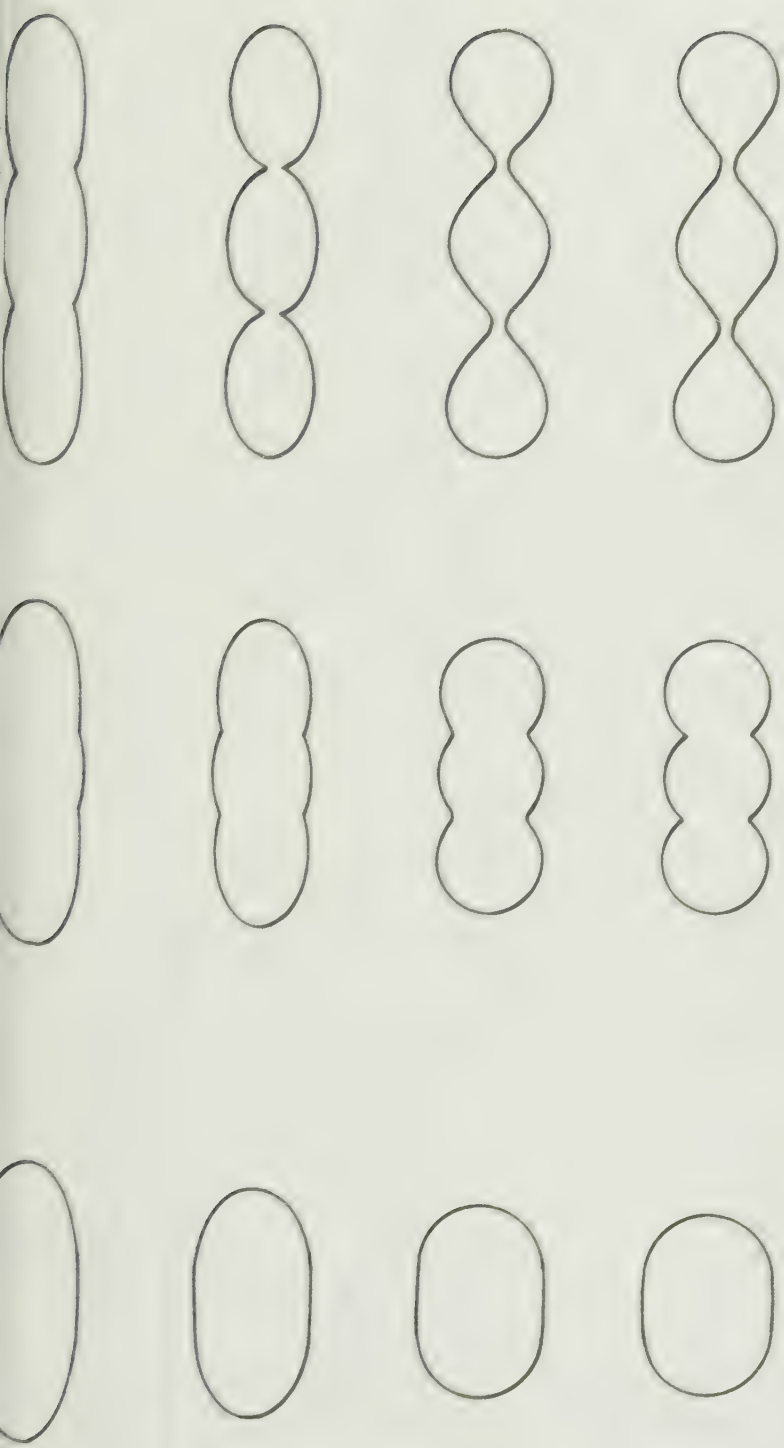


Fig. 5

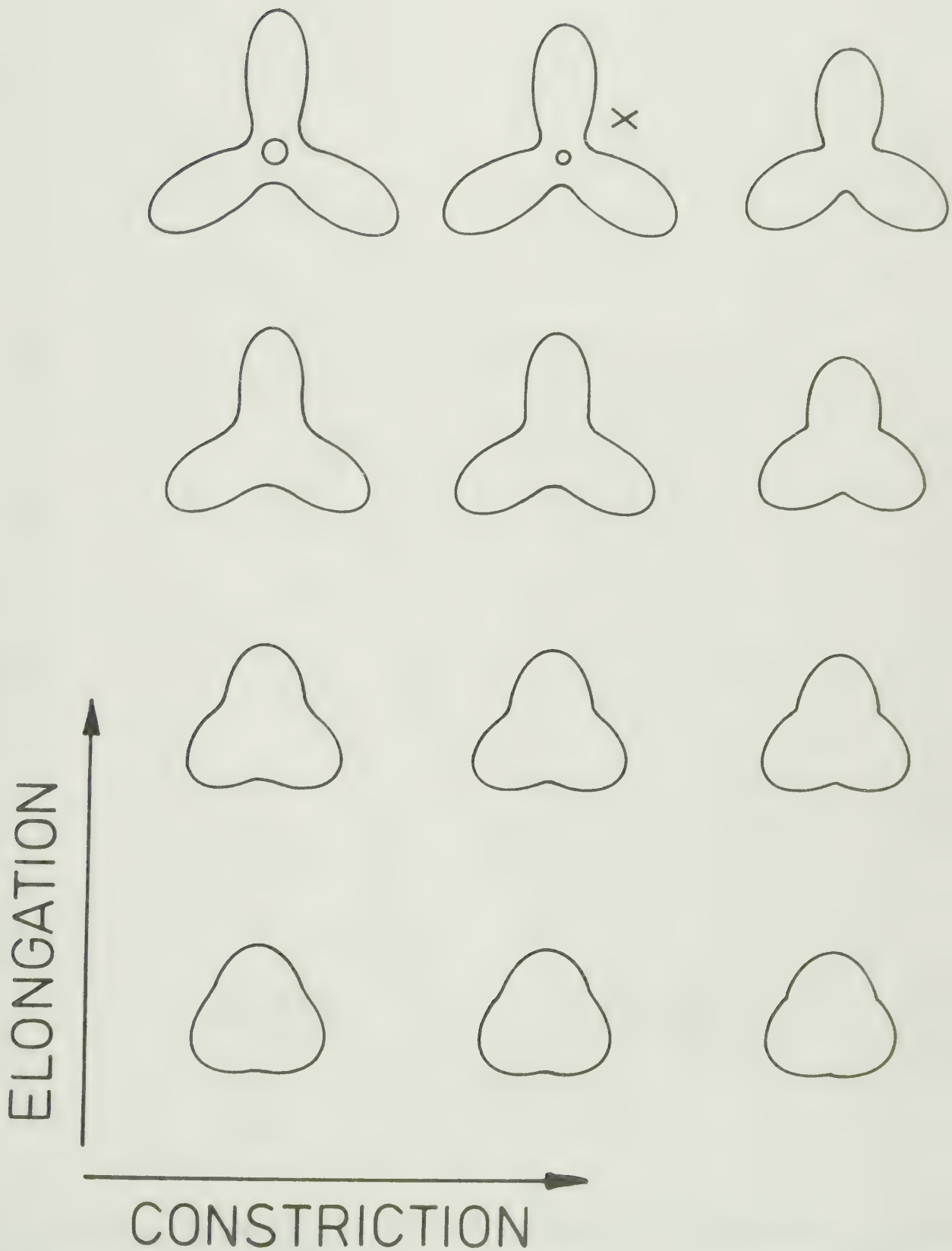
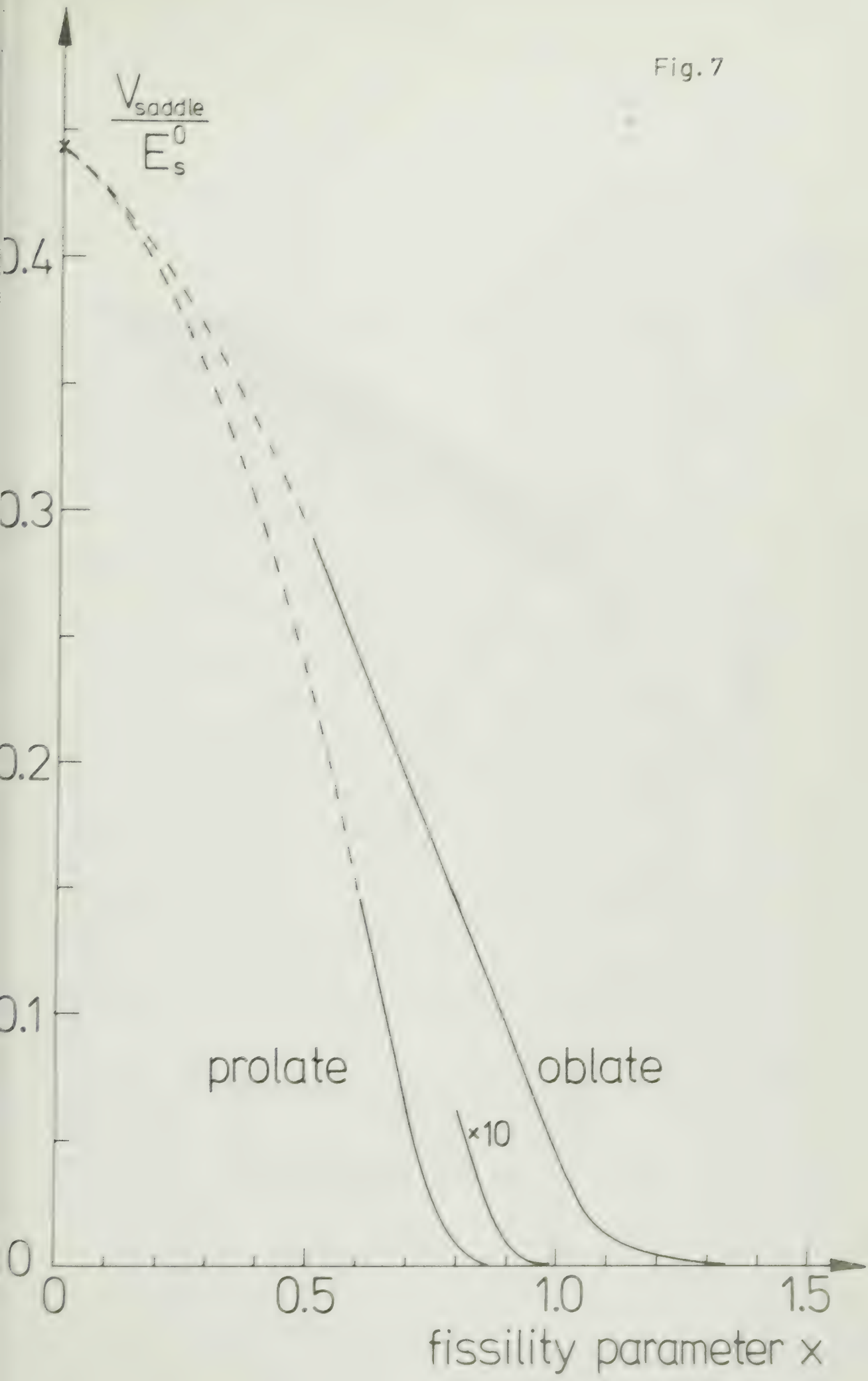



Fig. 6

Fig. 7


$\frac{V_{saddle}}{E_s^0}$
0.4
0.3
0.2
0.1
0
prolate
oblate
×10
0
0.5
1.0
1.5
fissility parameter x

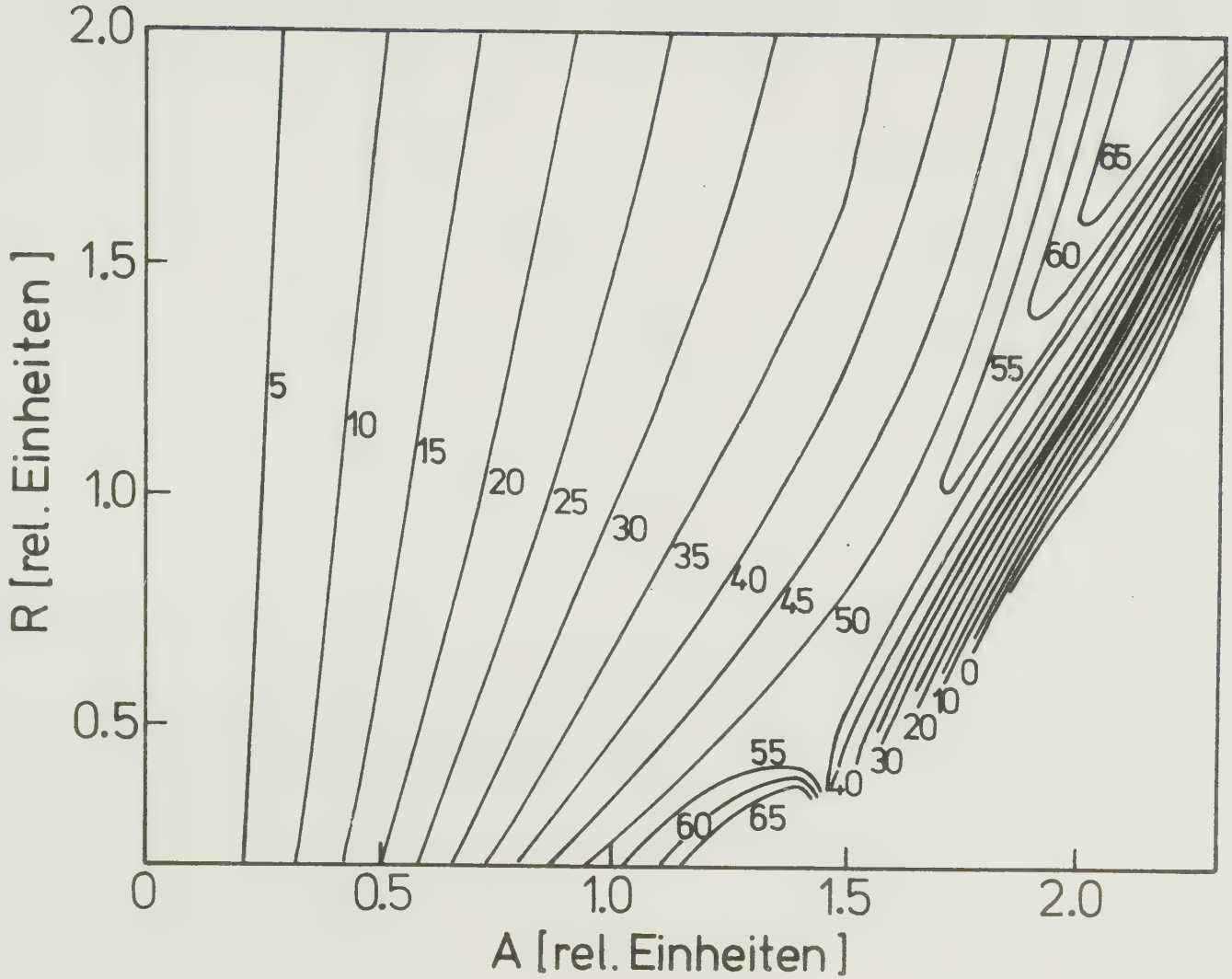

2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.5
1.0
1.5
2.0
R [rel. Einheiten]
A [rel. Einheiten]
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
0
10
20
30
40
55
60
65

Fig. 8

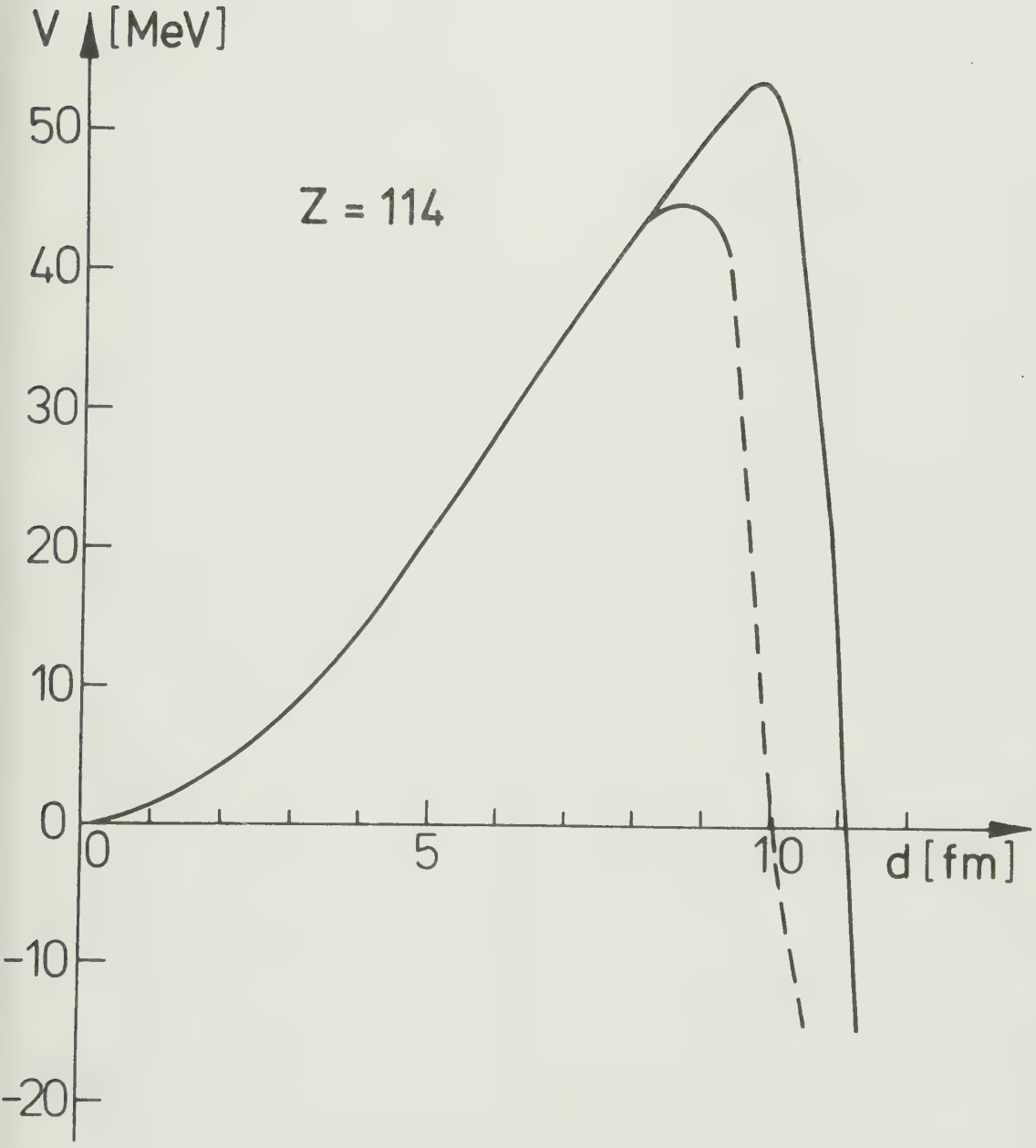



Fig. 9

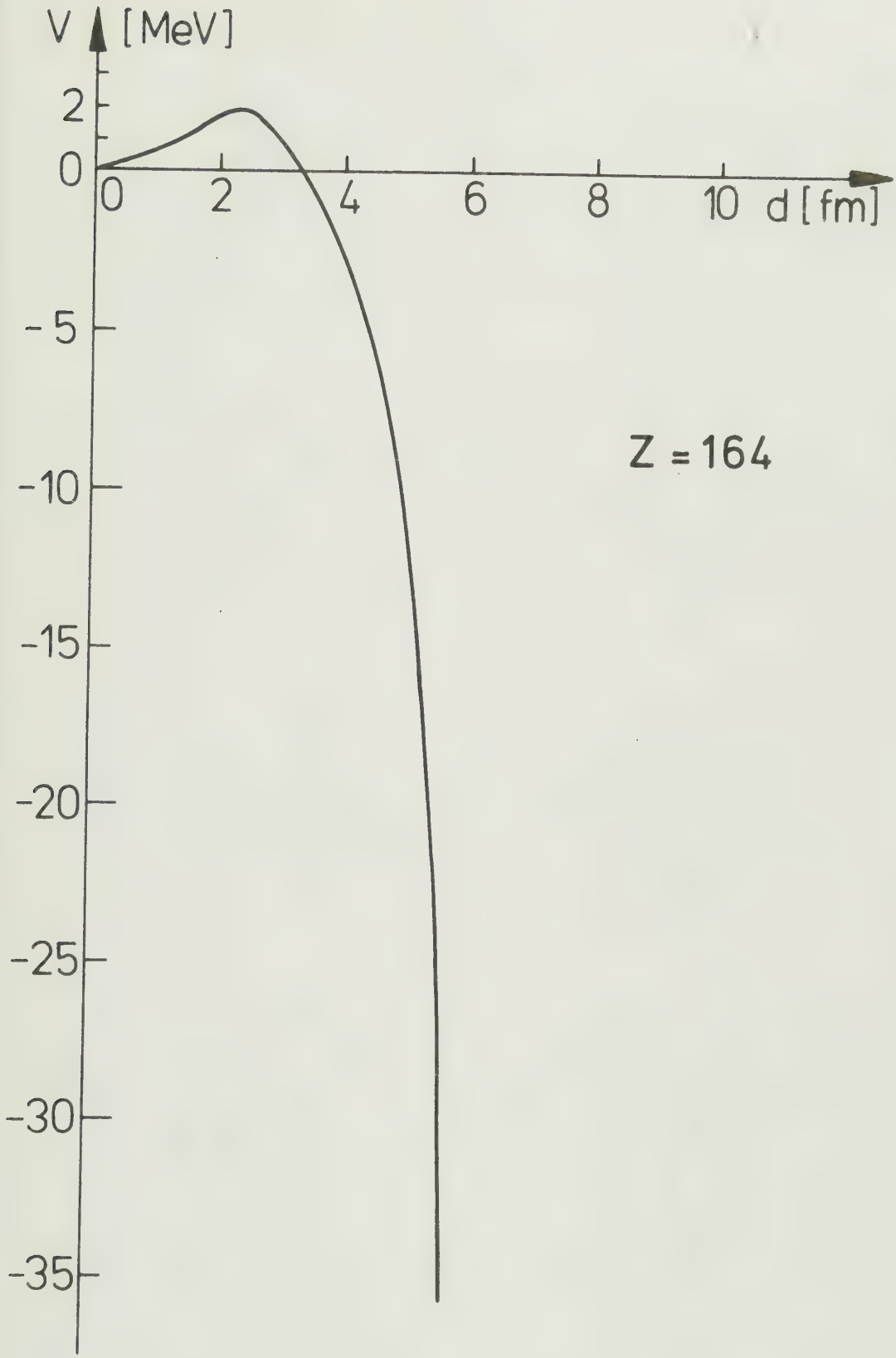
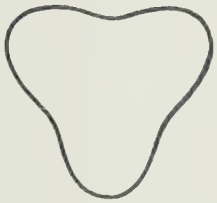
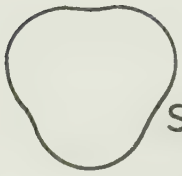
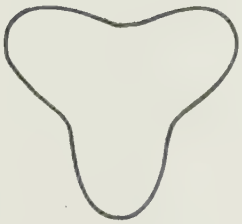



Fig. 10

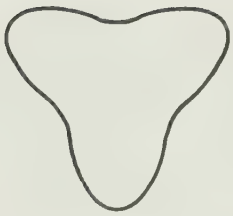


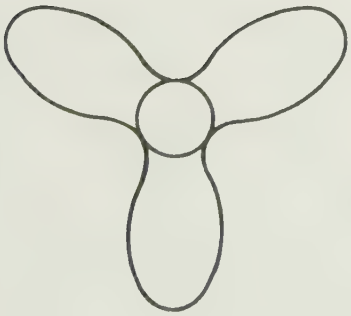


Sattelpunkt
Z = 164



Sattelpunkt
Z = 114





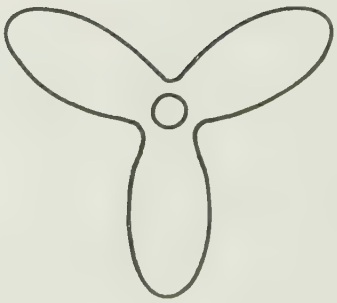


Fig. 11

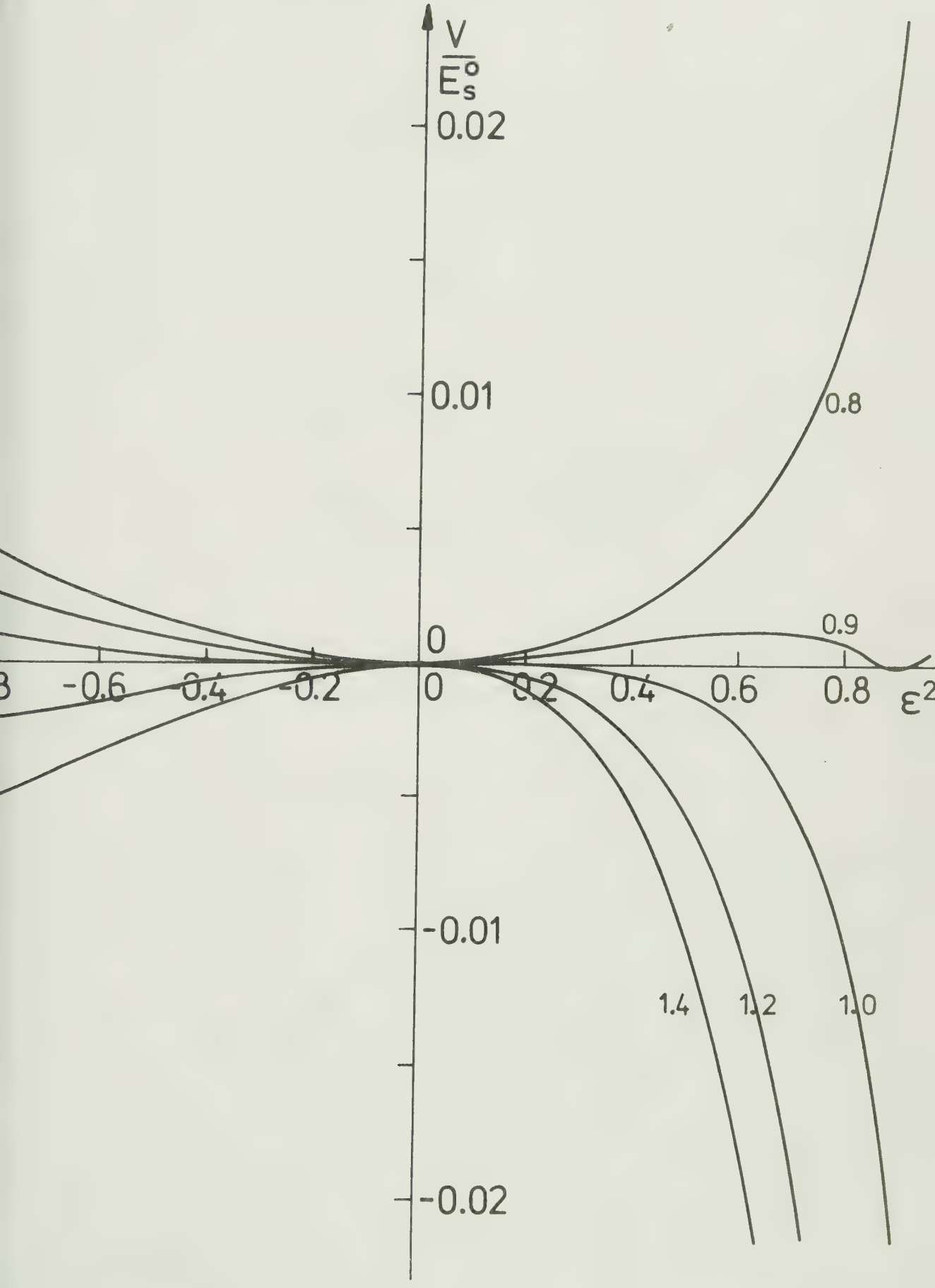

V
$\overline{E_s^o}$
0.02
0.01
0
-0.01
-0.02
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
$\varepsilon^2$
0.8
0.9
1.4
1.2
1.0

Fig. 12

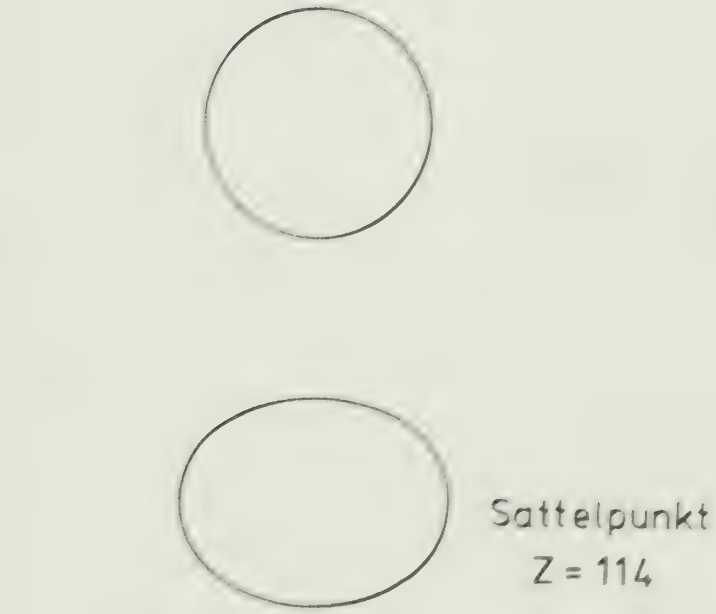



Fig. 13

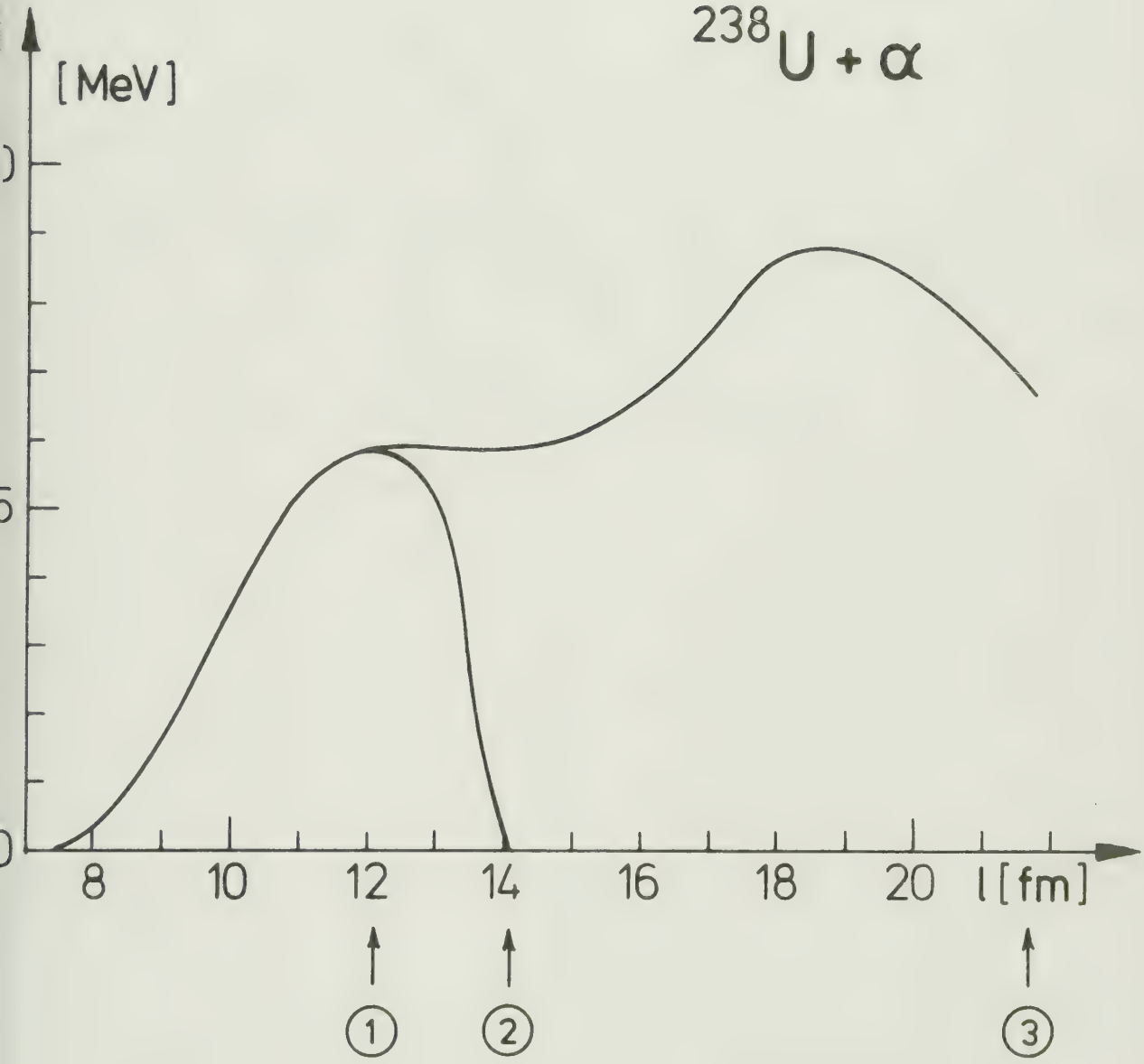



Fig. 14

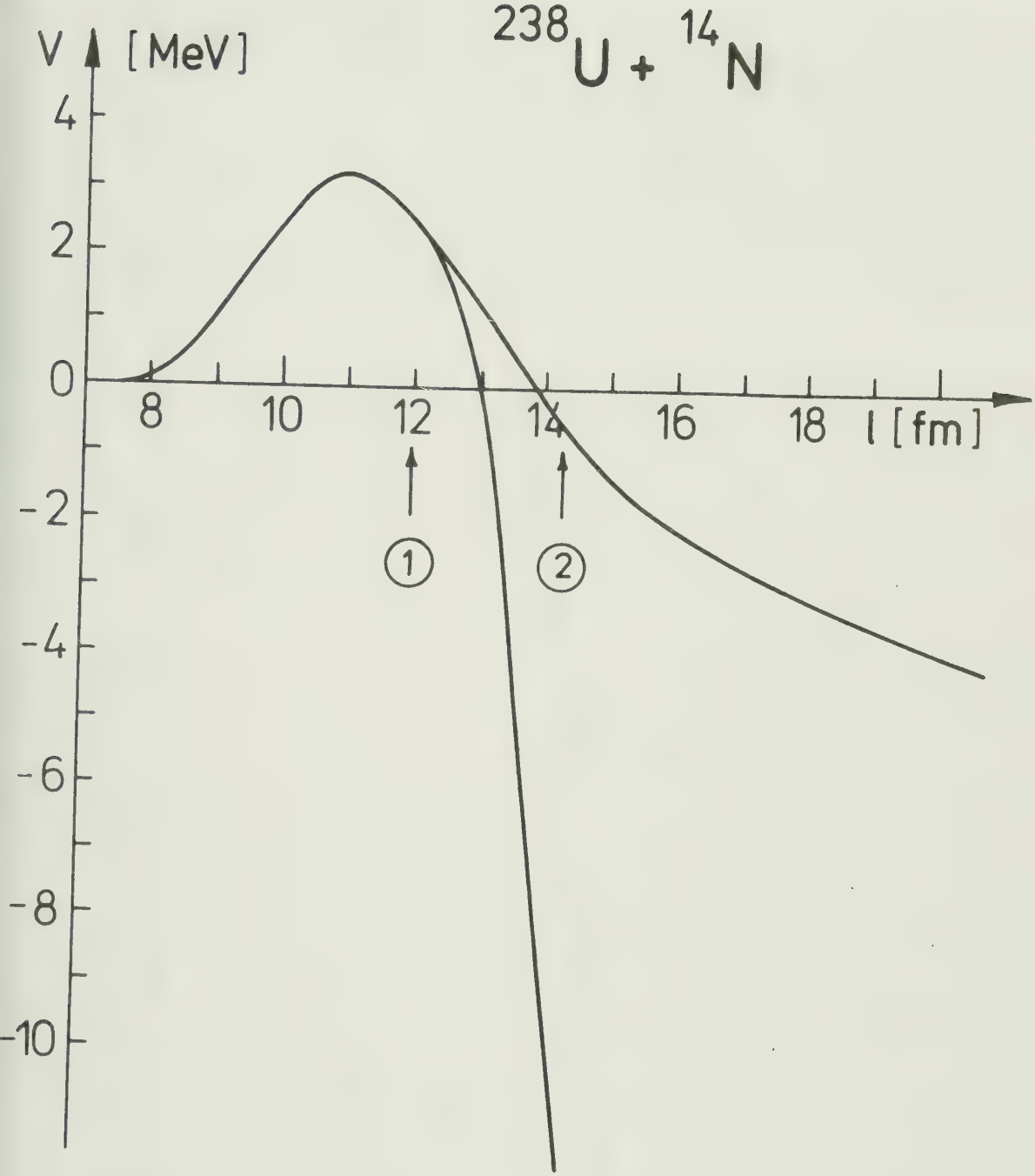



Fig. 15

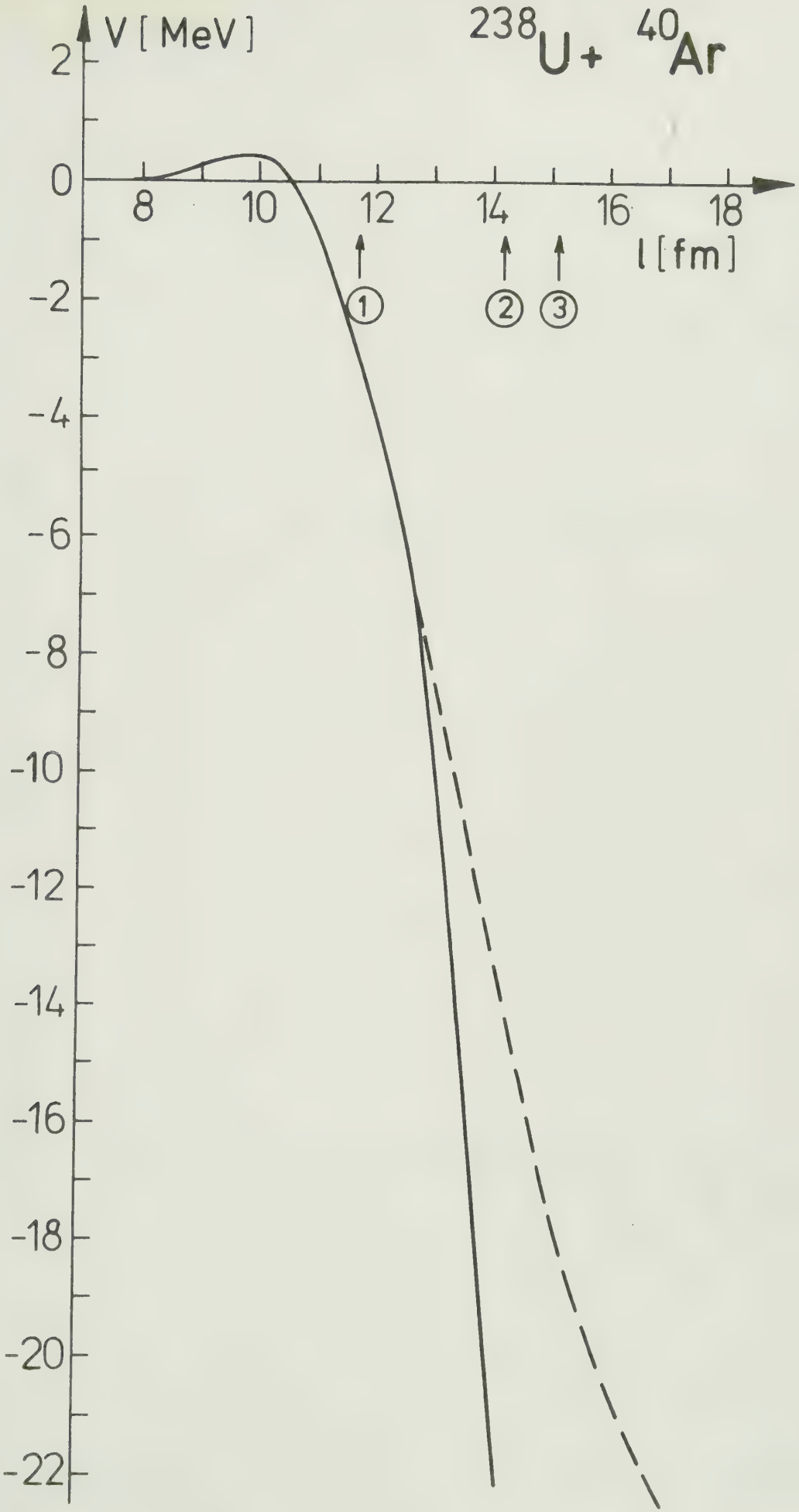



Fig. 16

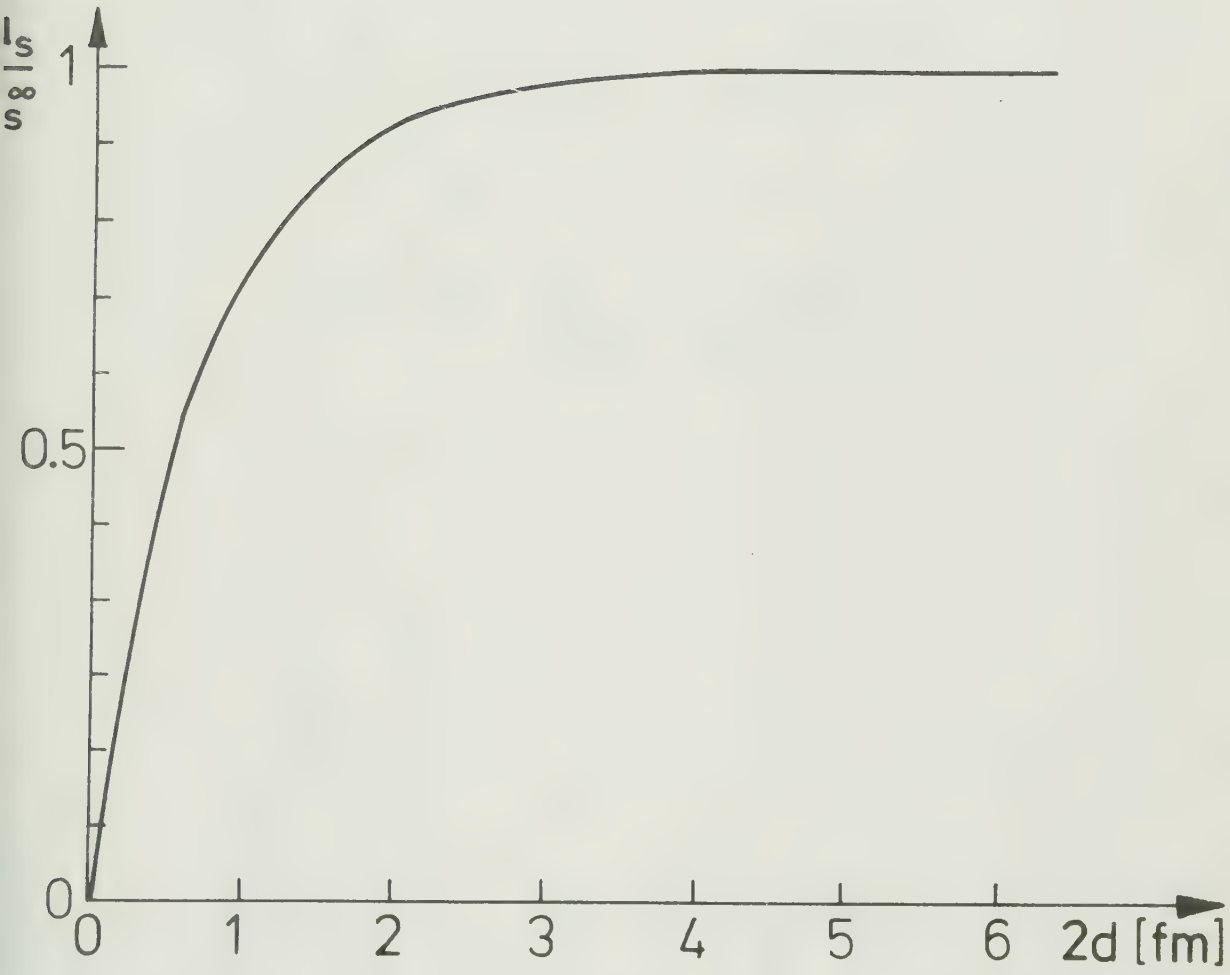



Fig.17

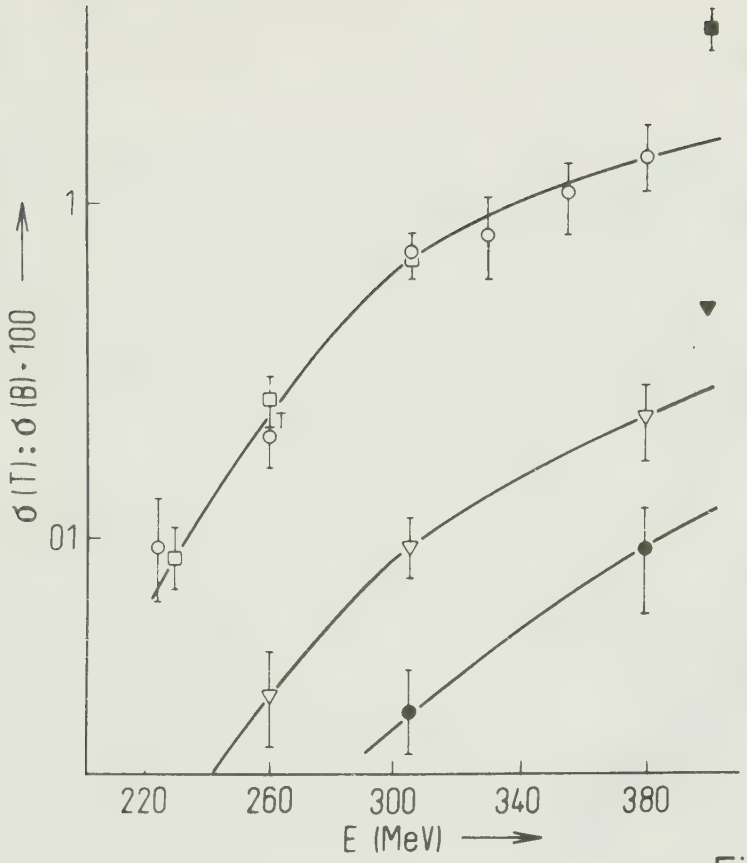

σ (T) : σ (B) · 100
1
01
220
260
300
340
380
E (MeV)

Fig. 18

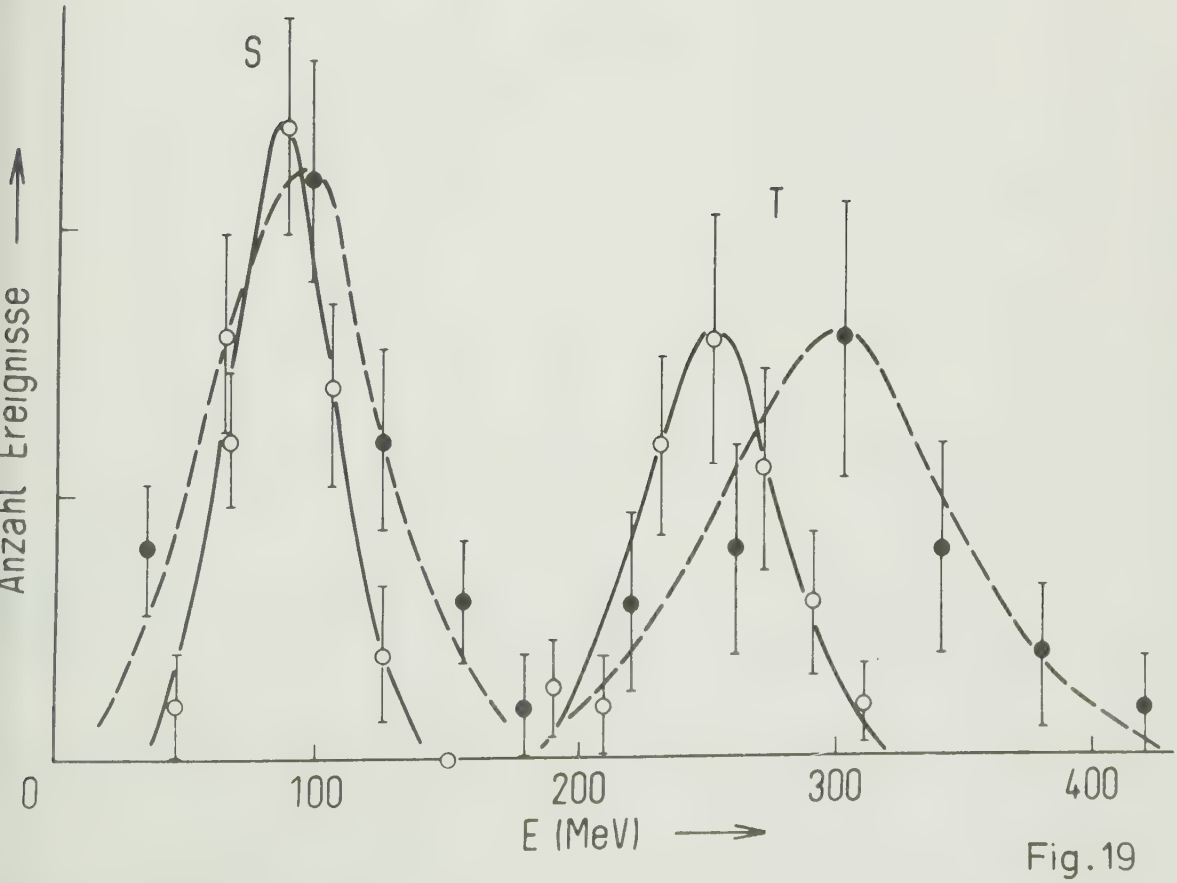

S
T
Anzahl Ereignisse
0
100
200
300
400
E (MeV)

Fig. 19

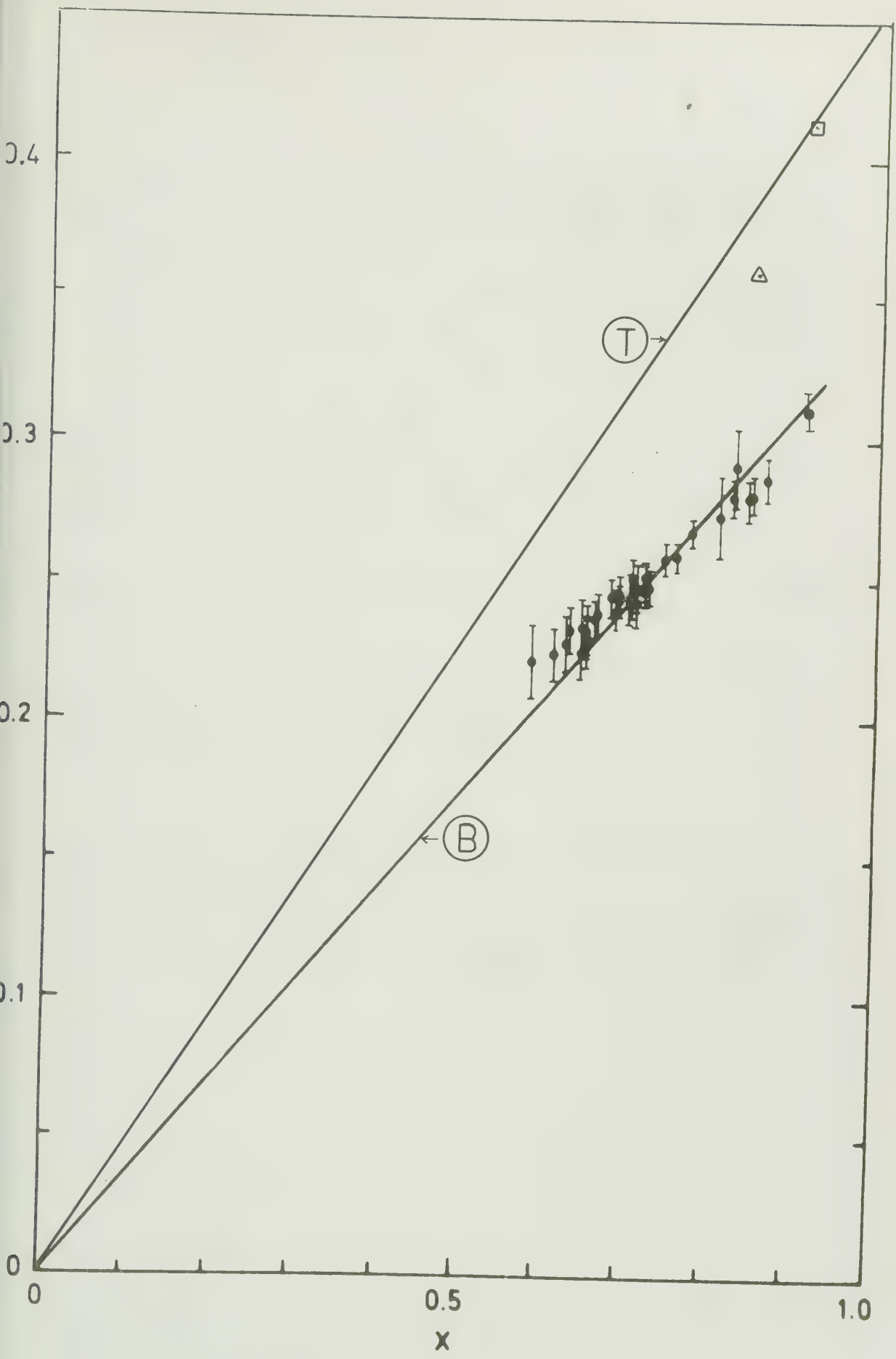



Fig. 20

Lebenslauf

Ich, Herbert Diehl, wurde am 22. Mai 1946 als Sohn von Hermann Diehl und seiner Ehefrau Elisabeth geb. Pfeifer in Crumstadt/Hessen geboren.
In Groß-Gerau besuchte ich von 1952-56 die Volksschule und anschließend das Gymnasium, die Prälat-Diehl-Schule, wo ich im Februar 1965 die Reifeprüfung ablegte.

Zum Sommersemester 1965 begann ich an der Technischen Hochschule Darmstadt das Physikstudium. Nach Beendigung meiner Diplomarbeit am dortigen Institut für Technische Kernphysik folgte im Juni 1970 die Diplomprüfung.

Nach dem Diplom begann ich am Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt bei Professor W. Greiner mit meiner Doktorarbeit.
Seit April 1971 bin ich an diesem Institut als wissenschaftlicher Angestellter tätig.
1971 heiratete ich Ruth Birkhofer.

Meine akademische Ausbildung erhielt ich im wesentlichen durch folgende Professoren:
W. Greiner, E. Kankeleit, P. Brix, E. Becker, H. Frank, O. Hellwege, O. Scherzer, D. Laugwitz, R. Lingenberg.